Antilles Guyane 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (3 points) (commun à tous les candidats)

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z-2|=1$.

1) Justifier que $\mathscr{C}$ est un cercle, dont on précisera le centre et le rayon.

2) Soit a un nombre réel. On appelle $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = ax$.
Déterminer le nombre de points d'intersection entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ en fonction des valeurs du réel a.

Antilles Guyane 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) Soit Ω le point d'affixe 2. Soient z un nombre complexe puis M le point du plan d'affixe z.

$$M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow |z-2| = 1 \Leftrightarrow |z - z_\Omega| = 1 \Leftrightarrow \Omega M = 1.$$

$\mathscr{C}$ est donc le cercle de centre Ω et de rayon 1.

2) Soit a un réel. Soient x un réel puis M le point de $\mathscr{D}$ d'abscisse x. Les coordonnées du point M sont (x, ax) puis l'affixe du point M est $z_M = x + iax$.

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C} &\Leftrightarrow |z_M - 2| = 1 \Leftrightarrow |x + iax - 2| = 1 \Leftrightarrow |(x-2) + iax|^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 + (ax)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + a^2x^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(a^2+1\right)x^2 - 4x + 3 = 0 \quad (E). \end{aligned}$$

Puisque $a^2 + 1 > 0$, (E) est une équation du second degré. Son discriminant est

$$\begin{aligned} \Delta &= (-4)^2 - 4 \times \left(a^2+1\right) \times 3 = 16 - 12a^2 - 12 = 4 - 12a^2 = -12\left(a^2 - \frac{1}{3}\right) \\ &= -12\left(a - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(a + \frac{1}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

1er cas. Si $a > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ou $a < -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, alors $\Delta < 0$ et donc l'équation (E) n'a pas de solution. Dans ce cas, le cercle $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ n'ont pas de point commun.

2ème cas. Si $a = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ou $a = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, alors $\Delta = 0$ et donc l'équation (E) a exactement une solution. Dans ce cas, le cercle $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ ont exactement un point commun. La droite $\mathscr{D}$ est alors tangente au cercle $\mathscr{C}$.

3ème cas. Si $-\dfrac{1}{\sqrt{3}} < a < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, alors $\Delta > 0$ et donc l'équation (E) a exactement deux solutions. Dans ce cas, le cercle $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ ont exactement deux points communs.