

Antilles Guyane 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (5 points) (commun à tous les candidats)

Les valeurs approchées des résultats seront données à 10^{-4} près.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65 % de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

- à la sortie de la machine A, 8 % des ampoules présentent un défaut ;
- à la sortie de la machine B, 5 % des ampoules présentent un défaut.

On définit les événements suivants :

- A : « l'ampoule provient de la machine A » ;
- B : « l'ampoule provient de la machine B » ;
- D : « l'ampoule présente un défaut ».

1) On prélève un ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.

- a) Construire un arbre pondéré représentant la situation.
- b) Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0,930 5.
- c) L'ampoule tirée est sans défaut.
Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.

2) On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A.

La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise.

Calculer la probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut.

Partie B

1) On rappelle que si T suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un réel strictement positif) alors pour tout réel positif a , $P(T \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx$.

- a) Montrer que $P(T \geq a) = e^{-\lambda a}$.
- b) Montrer que si T suit une loi exponentielle alors pour tous les réels positifs t et a on a

$$P_{T \geq t}(T \geq t + a) = P(T \geq a).$$

2) Dans cette partie, la durée de vie en heures d'une ampoule sans défaut est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle d'espérance 10 000.

- a) Déterminer la valeur exacte du paramètre λ de cette loi.
- b) Calculer la probabilité $P(T \geq 5\,000)$.
- c) Sachant qu'une ampoule sans défaut a déjà fonctionné pendant 7 000 heures, calculer la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12 000 heures.

Partie C

L'entreprise a cherché à améliorer la qualité de sa production et affirme qu'il n'y a pas plus de 6 % d'ampoules défectueuses dans sa production. Une association de consommateurs réalise un test sur un échantillon et obtient 71 ampoules défectueuses sur 1 000.

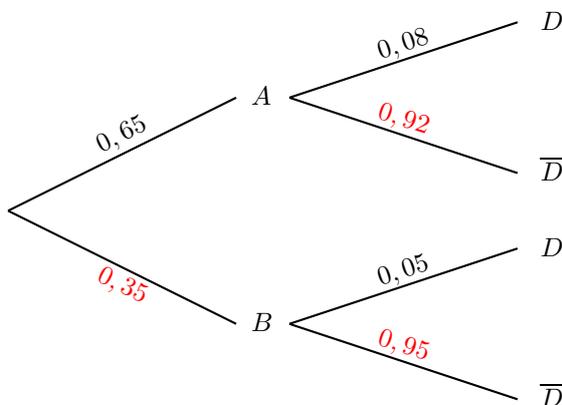
- 1) Dans le cas où il y aurait exactement 6 % d'ampoules défectueuses, déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'ampoules défectueuses sur un échantillon aléatoire de taille 1 000.
- 2) A-t-on des raisons de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise ?

Antilles Guyane 2016. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) a) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



b) La probabilité demandée est $P(\bar{D})$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(\bar{D}) &= P(A) \times P_A(\bar{D}) + P(B) \times P_B(\bar{D}) \\ &= 0,65(1 - 0,08) + (1 - 0,65)(1 - 0,05) = 0,65 \times 0,92 + 0,35 \times 0,95 = 0,598 + 0,3325 = 0,9305. \end{aligned}$$

$$P(\bar{D}) = 0,9305.$$

c) La probabilité demandée est $P_{\bar{D}}(A)$.

$$P_{\bar{D}}(A) = \frac{P(A \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{0,65 \times 0,92}{0,9305} = 0,6427 \text{ arrondi } \tilde{A} \ 10^{-4}.$$

$$P_{\bar{D}}(A) = 0,6427 \text{ arrondi } \tilde{A} \ 10^{-4}.$$

2) Notons X la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules sans défaut. La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,92$ (probabilité qu'une ampoule sortie de la machine A soit sans défaut). En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « l'ampoule est sans défaut » avec une probabilité $p = 0,92$ et « l'ampoule a un défaut » avec une probabilité $1 - p = 0,08$.

La probabilité demandée est $P(X \geq 9)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 9) &= P(X = 9) + P(X = 10) = \binom{10}{9} \times 0,92^9 \times 0,08 + 0,92^{10} \\ &= 0,8121 \text{ arrondi } \tilde{A} \ 10^{-4}. \end{aligned}$$

Partie B

1) a) Soit $a \geq 0$.

$$P(T \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^a = (-e^{-\lambda a}) - (-e^0) = 1 - e^{-\lambda a},$$

puis

$$P(T \geq a) = 1 - P(T \leq a) = 1 - (1 - e^{-\lambda a}) = e^{-\lambda a}.$$

b) Soient a et t deux réels positifs.

$$\begin{aligned}P_{T \geq t}(T \geq t + a) &= \frac{P((T \geq t + a) \cap (T \geq t))}{P(T \geq t)} = \frac{P(T \geq t + a)}{P(T \geq t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+a)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda t - \lambda a + \lambda t} \\ &= e^{-\lambda a} = P(T \geq a).\end{aligned}$$

2) a) On sait que $E(T) = \frac{1}{\lambda}$ et donc $\lambda = \frac{1}{10\,000} = 0,0001$.

b) $P(T \geq 5000) = e^{-0,0001 \times 5000} = e^{-0,5} = 0,6065$ arrondi à 10^{-4} .

c) La probabilité demandée est $P_{T \geq 7000}(T \geq 12\,000)$.

$$P_{T \geq 7000}(T \geq 12\,000) = P_{T \geq 7000}(T \geq 7000 + 5000) = P(T \geq 5000) = e^{-0,5} = 0,6065 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

$$P_{T \geq 7000}(T \geq 12\,000) = 0,6065 \text{ arrondi à } 10^{-4}.$$

Partie C

1) Ici, $n = 1000$ et $p = 0,06$. On note que $n \geq 30$ puis que $np = 60$ et $n(1 - p) = 940$ de sorte que $np \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% est

$$\begin{aligned}\left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] &= \left[0,06 - 1,96 \frac{\sqrt{0,06 \times 0,94}}{\sqrt{1000}}; 0,06 + 1,96 \frac{\sqrt{0,06 \times 0,94}}{\sqrt{1000}} \right] \\ &= [0,0452; 0,0748].\end{aligned}$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle.

2) La fréquence d'ampoules défectueuses observée est $f = \frac{71}{1000} = 0,071$. La fréquence f appartient à l'intervalle de fluctuation et on ne peut donc remettre en cause l'affirmation de l'entreprise.