CONCOURS D'ENTRÉE
CYCLE INGENIEUR

MATHEMATIQUES

Samedi 16 Avril 2016

Durée : 3 Heures

Epreuve de mathématiques (3 h)

Dans ce problème, on désigne par n un entier supérieur ou égal à 1, et on considère, sous réserve d'existence, la suite des intégrales I_n définies par :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \sin(t^n)\,\mathrm{d}t.$$

A cet effet, on calcule dans la partie I une intégrale auxiliaire, ce qui permet d'obtenir dans la partie II un équivalent de l'intégrale I_n lorsque n tend vers $+\infty$. Enfin, dans la partie III (qui est indépendante des précédentes), on propose une méthode de calcul de l'intégrale I_2.

■ PARTIE I : Etude d'une intégrale auxiliaire

On considère dans cette partie la fonction définie pour tout réel $x \geq 0$ par :

$$L(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2}\, e^{-x\,u}\,\mathrm{d}u.$$

1°) *Etude d'une fonction auxiliaire f*

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(u) = \frac{1-\cos(u)}{u^2}.$$

a) Etablir que f est une fonction continue, et vérifier que $0 \leq f(u) \leq 2\big/u^2$ pour $u > 0$.

b) Etablir que f admet une limite l (dont on précisera la valeur) lorsque u tend vers 0.
On posera $f(0) = l$, et on notera encore f ce prolongement par continuité de f à $\mathbb{R}_+$.

c) En déduire que l'intégrale $L(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u$ est convergente.

d) En déduire que l'intégrale $L(x)$ est convergente pour tout réel positif x.

2°) *Propriétés de la fonction L*

a) A l'aide d'un théorème dont on rappellera précisément l'énoncé, établir que la fonction L est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b) Vérifier l'inégalité : $\forall\, u \in \mathbb{R},\ 1-\cos(u) \leq \frac{u^2}{2}$, et en déduire que : $\forall\, u \geq 0,\ 0 \leq f(u) \leq \frac{1}{2}$.
En déduire que : $\forall\, x > 0,\ 0 \leq L(x) \leq \frac{1}{2\,x}$, et préciser la limite de L en $+\infty$.

c) Pour tout réel $\varepsilon > 0$, justifier les majorations suivantes pour tout $x \geq \varepsilon$ et tout $u > 0$:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(f(u)\,e^{-x\,u}\right)\right| \leq \frac{1}{2}\,u\,e^{-\varepsilon\,u} \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(f(u)\,e^{-x\,u}\right)\right| \leq \frac{1}{2}\,u^2\,e^{-\varepsilon\,u}.$$

d) A l'aide d'un théorème dont on rappellera précisément l'énoncé, établir que la fonction L est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et préciser $L''(x)$ sous forme d'une intégrale.

3°) *Expression de L(x) sans symbole intégral*

a) Calculer pour $x > 0$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{(-x+i)\,u}\,\mathrm{d}u$, et en déduire $\int_0^{+\infty} \cos(u)\, e^{-x\,u}\,\mathrm{d}u$.

En déduire l'expression sans symbole intégral de $L''(x)$ pour $x > 0$.

b) En déduire qu'il existe des réels C et D tels qu'on ait pour tout $x > 0$:

$$L(x) = -\frac{x}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \operatorname{Arctan}(x) + C\,x + D.$$

c) En exploitant la limite de $L(x)$ quand x tend vers $+\infty$, déterminer les constantes C et D.

En déduire enfin la valeur de l'intégrale $L(0)$.

■ PARTIE II : Etude asymptotique de la suite (I_n)

4°) *Etude de l'intégrale* I_1

a) Calculer, pour tout réel positif x, l'intégrale suivante $\int_0^x \sin(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Qu'en déduit-on pour l'intégrale I_1 ?

5°) *Etude d'une fonction auxiliaire* f_n

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on considère la fonction définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(t) = \frac{1-\cos(t^n)}{t^n}.$$

a) Etablir que f_n est une fonction continue, et vérifier que $0 \leq f_n(t) \leq 2/t^n$ pour $t > 0$.

b) Déterminer la limite l_n de $f_n(t)$ lorsque t tend vers 0.

On posera $f_n(0) = l_n$, *et on notera encore* f_n *ce prolongement par continuité de* f_n *à* $\mathbb{R}_+$.

c) Etablir que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

6°) *Etude de l'intégrale* I_n *pour* $n \geq 2$

a) A l'aide d'une intégration par parties, établir l'égalité suivante pour $x > \varepsilon > 0$:

$$\int_\varepsilon^x \sin(t^n)\,\mathrm{d}t = \frac{x\,f_n(x)}{n} - \frac{\varepsilon\,f_n(\varepsilon)}{n} + \frac{n-1}{n}\int_\varepsilon^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

b) En déduire la convergence de l'intégrale I_n pour $n \geq 2$.

Exprimer celle-ci en fonction de $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

c) A l'aide du changement de variable $u = t^n$ dans l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$, établir que :

$$I_n = \frac{n-1}{n^2}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^{2-1/n}}\,\mathrm{d}u.$$

7°) *Equivalent de l'intégrale* I_n

a) Rappeler l'énoncé du théorème de convergence dominée.

b) A l'aide de ce théorème et du résultat de la partie I, vérifier l'égalité suivante :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^{2-1/n}}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}.$$

c) En déduire que $I_n \sim \frac{\pi}{2\,n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

■ Partie III : Calcul de l'intégrale I_2

On se propose dans cette partie de calculer l'intégrale I_2, premier terme de la suite (I_n).

8°) *Intégrale d'une fonction rationnelle auxiliaire*

a) Pour $t \in \mathbb{R}$ et $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, donner les parties réelle et imaginaire du complexe $\frac{1}{t-e^{i\theta}}$.

b) En déduire qu'il existe $C \in \mathbb{C}$ tel qu'on ait :

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t-e^{i\theta}} = \frac{1}{2}\ln\left(t^2 - 2\,t\cos(\theta) + 1\right) + i\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{t-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) + C.$$

c) Factoriser le polynôme $X^2 - i$ dans $\mathbb{C}[X]$, et montrer que :

$$\frac{1}{X^2-i} = \frac{e^{-i\pi/4}}{2}\left(\frac{1}{X-e^{i\pi/4}} - \frac{1}{X-e^{5i\pi/4}}\right).$$

d) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-i}$.

9°) *Valeur de l'intégrale I_2*

On considère la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\exp\left(-x^2\left(t^2-i\right)\right)}{t^2-i}\,\mathrm{d}t\,.$$

a) Démontrer l'inégalité suivante pour tout réel x, puis justifier l'existence de $F(x)$:

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \left|\frac{\exp\left(-x^2\left(t^2-i\right)\right)}{t^2-i}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}.$$

b) Etablir que F est continue sur $\mathbb{R}_+$, et déterminer sa limite en $+\infty$.

c) Etablir que F est de classe C^1 sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et préciser $F'(x)$.

En exploitant l'égalité $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, exprimer $F'(x)$ sans symbole intégral.

d) Compte tenu de la valeur de $F(0)$ calculée au 8°, en déduire que $I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.