Ecole Pour l'Informatique et les Techniques Avancées.
Mathématiques.

Partie I. Etude d'une intégrale auxiliaire

1) *Etude d'une fonction auxiliaire* f

a) La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $]0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour $u>0$, $-1\leqslant \cos(u)\leqslant 1$ puis $0\leqslant 1-\cos(u)\leqslant 2$ puis $0\leqslant \dfrac{1-\cos(u)}{u^2}\leqslant \dfrac{2}{u^2}$ et donc

$$0\leqslant f(u)\leqslant \frac{2}{u^2}.$$

b) $f(u)=\dfrac{1-\cos(u)}{u^2}\underset{u\to 0}{\sim}\dfrac{u^2/2}{u^2}=\dfrac{1}{2}$. Ainsi, $\lim\limits_{u\to 0} f(u)=\dfrac{1}{2}$. On pose $f(0)=\dfrac{1}{2}$ (on note encore f le prolongement obtenu).

c) La fonction f est continue et positive sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 et dominée en $+\infty$ par la fonction $u\mapsto\dfrac{1}{u^2}$ qui est intégrable sur un voisinage de $+\infty$. Donc, la fonction f est intégrable sur $]0,+\infty[$ puis l'intégrale $I(0)$ est convergente.

d) Soit $x\geqslant 0$. La fonction $u\mapsto \dfrac{1-\cos(u)}{u^2}e^{-ux}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et pour tout $u>0$,

$$\left|\frac{1-\cos(u)}{u^2}e^{-ux}\right|=f(u)e^{-ux}\leqslant f(u).$$

Puisque la fonction f est intégrable sur $]0,+\infty[$, il en est de même de la fonction $u\mapsto\dfrac{1-\cos(u)}{u^2}e^{-ux}$. Donc, l'intégrale $L(x)$ est convergente.

2) *Propriétés de la fonction* L

a) Posons $\begin{array}{cccc}\Phi: & [0,+\infty[\times]0,+\infty[& \to & \mathbb{R}\\ & (x,u) & \mapsto & \dfrac{1-\cos(u)}{u^2}e^{-xu}\end{array}$ de sorte que pour tout $x\geqslant 0$, $L(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\Phi(x,u)\,du$.

- Pour tout $x\in[0,+\infty[$, la fonction $u\mapsto\Phi(x,u)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$,
- Pour tout $u\in]0,+\infty[$, la fonction $x\mapsto\Phi(x,u)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$,
- Pour tout $(x,u)\in[0,+\infty[\times]0,+\infty[$, $|\Phi(x,u)|\leqslant f(u)=\varphi(u)$ où φ est une fonction continue par morceaux sur $]0,+\infty[$, positive et intégrable sur $]0,+\infty[$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction L est continue sur $[0,+\infty[/$

b) Montrons que pour tout $u\in\mathbb{R}$, $|\sin(u)|\leqslant|u|$. Pour $u\in[0,1]$, posons $g(u)=\sin(u)$. La fonction g est concave sur $[0,1]\subset\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ car sa dérivée seconde, à savoir la fonction $u\mapsto-\sin(u)$, est négative sur cet intervalle. Le graphe de g est en particulier en dessous de sa tangente en son point d'abscisse 0 ce qui fournit : pour tout $u\in[0,1]$, $\sin(u)\leqslant 0+(u-0)=u$. Ainsi, $\forall u\in[0,1]$, $|\sin(u)=\sin(u)\leqslant u=|u|$.
Cette inégalité reste vraie pour $u\in[-1,0]$ par parité et donc $\forall u\in[-1,1]$, $|\sin(u)\leqslant|u|$. L'inégalité est immédiate si $|u|>1$ et finalement

$$\forall u\in\mathbb{R},\ |\sin(u)|\leqslant|u|.$$

Soit $u\in\mathbb{R}$. Par croissance de la fonction $t\mapsto t^2$ sur $[0,+\infty[$,

$$1-\cos(u)=2\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)=2\left|\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right|^2\leqslant 2\left|\frac{u}{2}\right|^2=\frac{u^2}{2}.$$

On a montré que pour tout réel u, $1-\cos(u)\leqslant\dfrac{u^2}{2}$. On en déduit que pour $u>0$, $0\leqslant\dfrac{1-\cos(u)}{u^2}\leqslant\dfrac{1}{2}$ ou encore $0\leqslant f(u)\leqslant\dfrac{1}{2}$. Cette dernière reste vraie quand $u=0$ car $f(0)=\dfrac{1}{2}$ et donc

$$\forall u \geqslant 0,\ 0 \leqslant f(u) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Soit $x > 0$. Pour tout $u > 0$, $0 \leqslant f(u)e^{-ux} \leqslant \dfrac{e^{-ux}}{2}$ (car $e^{-ux} \geqslant 0$). Par croissance de l'intégration, on obtient

$$\begin{aligned}0 \leqslant \int_0^{+\infty} f(u)e^{-ux}\ du = L(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{2}\ du &= \left[\frac{e^{-ux}}{-2x}\right]_{u=0}^{u=+\infty}\\ &= -\lim_{u\to+\infty} \frac{e^{-ux}}{-2x} + \frac{e^0}{2x} = 0 + \frac{1}{2x} \text{ (car } x > 0)\\ &= \frac{1}{2x}.\end{aligned}$$

On a montré que pour tout $x > 0$, $0 \leqslant L(x) \leqslant \dfrac{1}{2x}$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\lim_{x\to+\infty} L(x) = 0.$$

c) Soient $\varepsilon > 0$. La fonction Φ (définie en 2)a)) admet sur $[\varepsilon, +\infty[\times]0, +\infty[$ une dérivée partielle et une dérivée partielle seconde par rapport à sa première variable x définies par

$$\forall (x, u) \in [\varepsilon, +\infty[\times]0, +\infty[,\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, u) = -uf(u)e^{-xu} \text{ et } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, u) = u^2 f(u)e^{-xu}.$$

D'après la question 2)b), pour $(x, u) \in [\varepsilon, +\infty[\times]0, +\infty[$,

$$\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, u)\right| = uf(u)e^{-xu} \leqslant u \times \frac{1}{2} \times e^{-\varepsilon u} = \frac{1}{2}ue^{-\varepsilon u}$$

et

$$\left|\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, u)\right| = u^2 f(u)e^{-xu} \leqslant \frac{1}{2}u^2 e^{-\varepsilon u}.$$

d) Pour $u \in]0, +\infty[$, posons $\varphi_1(u) = \dfrac{1}{2}ue^{-\varepsilon u}$ et $\varphi_2(u) = \dfrac{1}{2}u^2 e^{-\varepsilon u}$. Les fonctions φ_1 et φ_2 sont continues sur $]0, +\infty$, prolongeables par continuité en 0 et négligeables devant $\dfrac{1}{u^2}$ en $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées.

Ainsi,

- pour tout $x \in [\varepsilon, +\infty[$, la fonction $u \mapsto \Phi(x, u)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$ (d'après 2)a)),
- la fonction Φ admet sur $[\varepsilon, +\infty[\times]0, +\infty[$, des dérivées partielles premières et secondes par rapport à sa première variable vérifiant
  -pour tout $x \in [\varepsilon, +\infty[$, les fonctions $u \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, u)$ et $u \mapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, u)$ sont continues par morceaux sur $]0, +\infty[$,
  -pour tout $u \in]0, +\infty[$, les fonctions $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, u)$ et $x \mapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, u)$ sont continues par morceaux sur $[\varepsilon, +\infty[$,
  -pour tout $(x, u) \in [\varepsilon, +\infty[\times]0, +\infty[$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, u)\right| \leqslant \varphi_1(u)$ et $\left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, u)\right| \leqslant \varphi_2(u)$ sont des fonctions continues par morceaux, positives et intégrables sur $]0, +\infty[$.

D'après une généralisation du théorème de dérivation des intégrales à paramètre, la fonction L est de classe C^2 sur $[\varepsilon, +\infty[$ et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a montré que la fonction L est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall x > 0,\ L''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, u)\ du = \int_0^{+\infty} (1 - \cos(u))\, e^{-xu}\ du.$$

3) *Expression de* $L(x)$ *sans symbole intégral*

a) Soit $x > 0$. Soit $A > 0$. $\displaystyle\int_0^A e^{(-x+i)u}\ du = \left[\frac{e^{(-x+i)u}}{-x+i}\right]_0^A = \frac{e^{(-x+i)A}}{-x+i} - \frac{1}{-x+i}$. Or $\left|e^{(-x+i)A}\right| = e^{-xA}$ et donc $\lim\limits_{A\to+\infty} e^{(-x+i)A} = 0$. Quand A tend vers $+\infty$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{(-x+i)u}\,du = \frac{1}{x-i}.$$

En particulier, l'intégrale ci-dessus converge et donc ses parties réelles et imaginaires sont des intégrales convergentes puis

$$\int_0^{+\infty} \cos(u)e^{-xu}\,du = \int_0^{+\infty} \mathrm{Re}\left(e^{(-x+i)u}\right)du = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-x+i)u}\,du\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{x-i}\right)$$
$$= \mathrm{Re}\left(\frac{x+i}{(x-i)(x+i)}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{x+i}{x^2+1}\right) = \frac{x}{x^2+1}.$$

On en déduit encore que

$$L''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xu}\,du - \int_0^{+\infty} \cos(u)e^{-xu}\,du = \left[\frac{e^{-xu}}{-x}\right]_{u=0}^{u=+\infty} - \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

b) Pour $x > 0$, posons $F(x) = -\dfrac{x}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) - \mathrm{Arctan}(x) = -\dfrac{x}{2}\ln\left(1+x^2\right) + x\ln(x) - \mathrm{Arctan}(x)$. F est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$F'(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) - \frac{x^2}{1+x^2} + \ln(x) + 1 - \frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \ln(x)$$

puis

$$F''(x) = -\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{x} = L''(x).$$

Par suite, en intégrant deux fois, il existe deux constantes réelles C et D telles que pour tout $x > 0$, $L(x) = F(x) + Cx + D = -\dfrac{x}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) - \mathrm{Arctan}(x) + Cx + D$.

c) D'après la question 2)b), $\lim\limits_{x\to+\infty} L(x) = 0$. Or, $-\dfrac{x}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\dfrac{x}{2}\times\dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{1}{2x}$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{x}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) - \mathrm{Arctan}(x) = -\dfrac{\pi}{2}$.

Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty} L(x) = 0$ si et seulement si $C = 0$ et $D = \dfrac{\pi}{2}$. On en déduit que

$$\forall x > 0,\ L(x) = -\frac{x}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \mathrm{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2} = -\frac{x}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right).$$

La fonction L est continue sur $[0,+\infty[$ et en particulier continue en 0. On en déduit que $L(0) = \lim\limits_{x\to0^+} L(x)$.

Or, $-\dfrac{x}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) \underset{x\to0^+}{\sim} -\dfrac{x}{2}\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = x\ln(x)$ et donc $\lim\limits_{x\to0^+} L(x) = 0 + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$. Donc,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2}\,du = \frac{\pi}{2}.$$

Partie II. Etude asymptotique de la suite (I_n)

4) *Etude de l'intégrale* I_1

a) Pour tout réel $x \geqslant 0$. $\displaystyle\int_0^x \sin(t)\,dt = 1 - \cos(x)$.

b) Cette expression n'a pas de limite quand x tend vers $+\infty$ (car $\cos(2n\pi) \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 1$ et $\cos((2n+1)\pi) \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} -1$). Donc, l'intégrale I_1 est une intégrale divergente.

5) *Etude d'une fonction auxiliaire* f_n

a) Soit $n \geqslant 2$. La fonction f_n est continue sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $]0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$. Ensuite, pour $t > 0$, $-1 \leqslant \cos(t^n) \leqslant 1$ puis $0 \leqslant 1 - \cos(t^n) \leqslant 2$ puis $0 \leqslant \dfrac{1-\cos(t^n)}{t^n} \leqslant \dfrac{2}{t^n}$ et donc

$$0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{2}{t^n}.$$

b) $\dfrac{1-\cos(t^n)}{t^n} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{(t^n)^2/2}{t^n} = \dfrac{t^n}{2}$ et en particulier, $f_n(t) \underset{t\to 0}{\to} 0$. On pose donc $f_n(0) = 0$.

c) La (nouvelle) fonction f_n est continue sur $[0,+\infty[$ et est dominée en $+\infty$ par $\dfrac{1}{t^n}$ avec $n \geqslant> 1$. Donc, la fonction f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$ puis l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\ dt$ est une intégrale convergente.

6) *Etude de l'intégrale* I_n *pour* $n \geqslant 2$

a) Soient ε et x deux réels tels que $0 < \varepsilon < x$. Les deux fonctions $t \mapsto 1-\cos(t^n)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^{n-1}}$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon, x]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^x \sin(t^n)\ dt &= \frac{1}{n}\int_\varepsilon^x nt^{n-1}\sin(t^n)\frac{1}{t^{n-1}}\ dt\\ &= \frac{1}{n}\left(\left[\frac{1-\cos(t^n)}{t^{n-1}}\right]_\varepsilon^x - \int_\varepsilon^x (1-\cos(t^n)) \times \frac{-(n-1)}{t^n}\ dt\right)\\ &= \frac{1}{n}\left([tf_n(t)]_\varepsilon^x + (n-1)\int_\varepsilon^x f_n(t)\ dt\right)\\ &= \frac{xf_n(x)}{n} - \frac{\varepsilon f_n(\varepsilon)}{n} + \frac{n-1}{n}\int_\varepsilon^x f_n(t)\ dt\end{aligned}$$

b) D'après la question b), pour tout réel $x > 0$, $0 \leqslant xf_n(x) \leqslant \dfrac{1}{x^{n-1}}$ avec $n-1 \geqslant 1$. Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xf_n(x) = 0$.

Ensuite, $\varepsilon f_n(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \dfrac{\varepsilon^{n-1}}{2}$ avec $n-1 \geqslant 1$ et en particulier, $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon f_n(\varepsilon) = 0$.

Enfin, l'intégrale $\displaystyle\int_\varepsilon^x f_n(t)\ dt$ a une limite quand ε tend vers 0 et x tend vers $+\infty$. Ceci montre que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^n)\,dt$ est une intégrale convergente. De plus, quand ε tend vers 0 et x tend vers $+\infty$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \sin(t^n)\,dt = \frac{n-1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t^n)}{t^n}\ dt.$$

c) En posant, $u = t^n$ et donc $t = u^{\frac{1}{n}}$ et $dt = \dfrac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}\ du$, on obtient

$$I_n = \frac{n-1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t^n)}{t^n}\ dt = \frac{n-1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u}\,\frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}\ du = \frac{n-1}{n^2}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(u)}{u^{2-\frac{1}{n}}}\ du.$$

7) *Equivalent de l'intégrale* I_n

a) Théorème de convergence dominée. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si
- chaque fonction f_n est continue par morceaux sur I,
- la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une certaine fonction f sur I et la fonction f est continue par morceaux sur I,
- il existe une fonction φ continue par morceaux, réelle positive et intégrable sur I telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leqslant \varphi$ (hypothèse domination),

alors,
- la fonction f est intégrable sur I,
- la suite $\left(\displaystyle\int_I f_n(x)\ dx\right)$ converge,
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n(x)\ dx = \int_I f(x)\ dx$.

b) On applique ce théorème aux fonctions $f_n\ :\ u \mapsto \dfrac{1-\cos(u)}{u^{2-\frac{1}{n}}}$, $n \geqslant 2$, sur $I =]0,+\infty[$.

Chaque fonction f_n est continue sur $]0,+\infty[$ et la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f\ :\ u \mapsto \dfrac{1-\cos(u)}{u^2}$ où de plus f est continue sur $]0,+\infty[$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u > 0$. Si $u < 1$, $\ln(u) < 0$ puis $\dfrac{1}{u^{2-\frac{1}{n}}} = e^{\left(-2+\frac{1}{n}\right)\ln(u)} \leqslant e^{-2\ln(u)} = \dfrac{1}{u^2}$. Si $u \geqslant 1$, $\ln(u) \geqslant 0$ puis $\dfrac{1}{u^{2-\frac{1}{n}}} = e^{\left(-2+\frac{1}{n}\right)\ln(u)} \leqslant e^{\left(-2+\frac{1}{2}\right)\ln(u)} = \dfrac{1}{u^{\frac{3}{2}}}$. Donc

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall u > 0,\ 0 \leqslant f_n(u) \leqslant \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1-\cos(u)}{u^2} \text{si } u < 1 \\ \dfrac{1-\cos(u)}{u^{\frac{3}{2}}} \text{ si } u \geqslant 1 \end{array}\right. = \varphi(u).$$

La fonction φ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, prolongeable par continuité en 0 et dominée par $\dfrac{1}{u^{\frac{3}{2}}}$ en $+\infty$ avec $\dfrac{3}{2} > 1$. Donc, la fonction φ est donc intégrable sur $]0, +\infty[$.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos(u)}{u^{2-\frac{1}{n}}}\,du\right)_{n\geqslant 2}$ converge et d'après la question 3)c),

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^{2-\frac{1}{n}}}\,du = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^{2-\frac{1}{n}}}\,du = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2}\,du = \frac{\pi}{2}.$$

c) $\dfrac{n-1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos(u)}{u^{2-\frac{1}{n}}}\,du \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$. Donc,

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}.$$

Partie III. Calcul de l'intégrale I_2

8) *Intégrale d'une fraction rationnelle auxiliaire*

a) Soit $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. Donc, $e^{i\theta} \notin \mathbb{R}$ et donc pour tout réel t, $t - e^{i\theta} \neq 0$. Ensuite,

$$\frac{1}{t-e^{i\theta}} = \frac{t-e^{-i\theta}}{\left(t-e^{i\theta}\right)\left(t-e^{-i\theta}\right)} = \frac{t-\cos(\theta)+i\sin(\theta)}{t^2-2t\cos(\theta)+1}$$

et donc $\text{Re}\left(\dfrac{1}{t-e^{i\theta}}\right) = \dfrac{t-\cos(\theta)}{t^2-2t\cos(\theta)+1}$ et $\text{Im}\left(\dfrac{1}{t-e^{i\theta}}\right) = \dfrac{\sin(\theta)}{t^2-2t\cos(\theta)+1}$.

b) La fonction $F_1\ :\ t \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left(t^2-2t\cos(\theta)+1\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car pour tout réel t, $t^2-2t\cos(\theta)+1 = \left|t-e^{i\theta}\right|^2 > 0$) et pour tout réel t, $F_1'(t) = \dfrac{t-\cos(\theta)}{t^2-2t\cos(\theta)+1}$. La fonction $F_2\ :\ t \mapsto \text{Arctan}\left(\dfrac{t-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t, $F_2'(t) = \dfrac{1}{\sin(\theta)} \times \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{t-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)^2}$.

Donc, la fonction $F = F_1 + iF_2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t, $F'(t) = \dfrac{t-\cos(\theta)}{t^2-2t\cos(\theta)+1} + i\dfrac{\sin(\theta)}{t^2-2t\cos(\theta)+1} = \dfrac{1}{t-e^{i\theta}}$. Par suite, les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t-e^{i\theta}}$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left(t^2-2t\cos(\theta)+1\right) + i\,\text{Arctan}\left(\dfrac{t-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) + C$, $C \in \mathbb{C}$.

c) $X^2 - i = X^2 - \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = \left(X - e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X + e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = \left(X - e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X - e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)}\right) = \left(X - e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X - e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)$. Donc, en tenant compte du fait que la fraction $R = \dfrac{1}{X^2-i}$ est paire et que sa partie entière est nulle, il existe un nombre complexe a tel que

$$\frac{1}{X^2-i} = \frac{a}{X-e^{i\frac{\pi}{4}}} - \frac{a}{X+e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{a}{X-e^{i\frac{\pi}{4}}} - \frac{a}{X-e^{i\frac{5\pi}{4}}}.$$

En posant $P = 1$ et $Q = X^2 - i$ de sorte que $R = \dfrac{P}{Q}$, on sait que

$$a = \frac{P\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)}{Q'\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)} = \frac{1}{2\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2}.$$

Donc,

$$\frac{1}{X^2-i}=\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2}\left(\frac{1}{X-e^{i\frac{\pi}{4}}}-\frac{1}{X-e^{i\frac{5\pi}{4}}}\right).$$

d) D'après la question 8)b), une primitive de la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t^2-i}$ est la fonction

$$F\ :\ t\mapsto\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{t^2-2t\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+1}{t^2-2t\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+1}\right)+i\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{t-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)-i\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{t-\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)}\right)\right),$$

ou encore

$$F\ :\ t\mapsto\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{t^2-t\sqrt{2}+1}{t^2+t\sqrt{2}+1}\right)+i\left(\mathrm{Arctan}\left(t\sqrt{2}-1\right)+\mathrm{Arctan}\left(t\sqrt{2}+1\right)\right)\right),$$

$F(0)=\dfrac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2}\left(\dfrac{1}{2}\ln(1)-i\,\mathrm{Arctan}(1)+i\,\mathrm{Arctan}(1)\right)=0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}F(t)=\dfrac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2}\left(\dfrac{1}{2}\ln(1)+i\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)=\dfrac{i\pi e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2}=\dfrac{e^{i\frac{\pi}{2}}\pi e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2}=\dfrac{\pi e^{i\frac{\pi}{4}}}{2}$. Donc,

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2-i}\,dt=\lim_{t\to+\infty}F(t)-F(0)=\frac{\pi e^{i\frac{\pi}{4}}}{2}.$$

9) *Valeur de l'intégrale* I_2

a) Soient $x\in\mathbb{R}$ et $t\in[0,+\infty[$.

$$\left|\frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}\right|=\frac{\left|e^{-x^2t^2}\times e^{ix^2}\right|}{|t^2-i|}=\frac{e^{-x^2t^2}}{\sqrt{t^4+1}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{t^4+1}}.$$

Soit $x\in\mathbb{R}$. La fonction $t\mapsto\dfrac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et est majorée par la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}}$. Cette dernière fonction est dominée par $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$ et est donc intégrable sur $[0,+\infty[$.

Donc, la fonction $t\mapsto\dfrac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ puis $F(x)$ existe dans $\mathbb{C}$.

b) Soit $\Phi\ :\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}\times[0,+\infty[& \to & \mathbb{C}\\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}\end{array}$ de sorte que pour tout réel x, $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\Phi(x,t)\,dt$.

- Pour tout réel x, la fonction $t\mapsto\Phi(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$,
- Pour tout réel t, la fonction $x\mapsto\Phi(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$,
- Pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,+\infty[$, $|\phi(x,t)|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{t^4+1}}=\varphi(t)$ où φ est une fonction continue par morceaux, positive et intégrable sur $[0,+\infty[$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, F est continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel $x>0$,

$$\begin{aligned}|F(x)|=\left|\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}\,dt\right|&\leqslant\int_0^{+\infty}\left|\frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}\right|\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x^2t^2}}{\sqrt{t^4+1}}\,dt\\&\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-x^2t^2}\,dt=\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\,du\text{ (en posant }u=xt)\\&=\frac{\sqrt{\pi}}{2x}.\end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\pi}}{2x}=0$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$.

c) Soi $[a, b]$ un segment contenu dans $]0, +\infty[$. La fonction Φ admet sur $[a, b] \times [0, +\infty[$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x définie par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-x^2(t^2-i)}.$$

De plus,

- pour tout x de $[a, b]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$,
- pour tout t de $[0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $[a, b]$,
- pour tout $(x, t) \in [a, b] \times [0, +\infty[$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| = 2xe^{-x^2t^2} \leqslant 2be^{-a^2t^2} = \varphi_1(t)$ où φ_1 est une fonction continue par

morceaux, positive et intégrable sur $[0, +\infty[$ car dominée par $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, F est de classe C^1 sur $[a, b]$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Ceci étant vrai pour tout segment $[a, b]$ contenu dans $]0, +\infty[$, on a montré que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$ (en posant $u = xt$),

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} -2xe^{-x^2(t^2-i)}\ dt = -2e^{-ix^2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}\ xdt = -2e^{-ix^2}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\ du = -\sqrt{\pi}e^{-ix^2}.$$

Donc,

$$\forall x > 0,\ F'(x) = -\sqrt{\pi}e^{ix^2}.$$

d) Par suite, pour a et b réels tels que, $0 < a < b$, $F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b -\sqrt{\pi}e^{ix^2}\ dx$. D'après la question 9)b), $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} F(b) = 0$.

D'autre part, F est continue en 0 et donc $\displaystyle\lim_{a\to 0^+} F(a) = F(0) = \frac{\pi e^{i\frac{\pi}{4}}}{2}$ d'après la question 8)d).

Quand a tend vers 0 et b tend vers $+\infty$, on obtient $-\dfrac{\pi e^{i\frac{\pi}{4}}}{2} = -\sqrt{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{ix^2}\ dx$ puis

$$\int_0^{+\infty} e^{ix^2}\ dx = \frac{\sqrt{\pi}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2},$$

et en prenant la partie imaginaire des deux membres,

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \sin\left(x^2\right)\ dx = \frac{\sqrt{\pi}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

