Ecole Pour l'Informatique et les Techniques Avancées.
Mathématiques. Option

Partie I. Première obtention de deux Faces consécutifs

1) *Relations entre les probabilités* p_n

a) $E_1 = \varnothing$ puis $p_1 = 0$. $E_2 = F_1 \cap F_2$ puis $p_2 = P(F_1) \times P(F_2) = p^2$ (car les jets sont indépendants).
$E_3 = F_3 \cap F_2 \cap P_1$ puis $p_3 = p^2 q$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les événements $E_1, \ldots, E_n$, sont deux à deux disjoints et donc $P(E_1 + \ldots + E_n) = P(E_1) + \ldots + P(E_n) = p_1 + \ldots + p_n$.

c) Soit $n \geqslant 1$. L'événement E_{n+3} est réalisé si et seulement on obtient Face au $(n+3)$-ème jet et au $(n+2)$-ème jet, on obtient pas Face au $(n+1)$-ème jet et on n'a jamais obtenu deux faces consécutifs avant.
Donc, $E_{n+3} = F_{n+3} \cap F_{n+2} \cap P_{n+1} \cap \overline{E_n} \cap \ldots \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_1}$.

d) Puisque les différents événements sont mutuellement indépendants, les événements F_{n+3}, F_{n+2}, P_{n+1} et $\left(\overline{E_n}\right) \cap \ldots \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_1}$ sont mutuellement indépendants d'après le lemme des coalitions entre autre puis

$$\begin{aligned}
p_{n+3} &= P(F_{n+3}) \times P(F_{n+2}) \times P(P_{n+1}) \times P\left(\overline{E_n} \cap \ldots \cap \overline{E_2} \cap \overline{E_1}\right) \\
&= p^2 q \times P\left(\overline{E_n \cup \ldots \cup E_2 \cup E_1}\right) = p^2 q\,(1 - P(E_n \cup \ldots \cup E_2 \cup E_1)) \\
&= p^2 q \left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\right).
\end{aligned}$$

e) Soit $n \geqslant 2$.

$$p_{n+3} = p^2 q \left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\right) = p^2 q \left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} p_k - p_n\right) = p^2 q \left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} p_k\right) - p^2 q p_n = p_{n+2} - p^2 q p_n.$$

Si $n = 1$, $p_4 = p^2 q \left(1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{1} p_k\right) = p^2 q = p_3 - p^2 q p_1$ car $p_3 = p^2 q$ et $p_1 = 0$.

2) *Expression des probabilités* p_n

a) $P(p) = p^3 - p^2 + p^2 q = -p^2(1-p) + p^2(1-p) = 0$. Donc, p est racine de P puis si on note r_1 et r_2 les deux autres racines de P dans $\mathbb{C}$, on a $r_1 + r_2 + p = 1$ et $r_1 r_2 p = -p^2 q$ et donc $r_1 + r_2 = 1 - p = q$ et $r_1 r_2 = -pq$. Donc,

$$P = X^3 - X^2 + p^2 q = (X - p)\left(X^2 - qX - p(1-p)\right) = (X - p)\left(X^2 - (1-p)X - p(1-p)\right).$$

Le discriminant du trinôme $Q = X^2 - (1-p)X - p(1-p)$ est $(1-p)^2 + 4p(1-p) = (1-p)(1+3p) > 0$. Ce trinôme admet deux racines réelles distinctes à savoir $r_1 = \dfrac{1 - p + \sqrt{(1-p)(1+3p)}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1 - p - \sqrt{(1-p)(1+3p)}}{2}$. Finalement,

$$P = (X - p)Q == (X - p)\left(X - \frac{1 - p + \sqrt{(1-p)(1+3p)}}{2}\right)\left(X - \frac{1 - p - \sqrt{(1-p)(1+3p)}}{2}\right).$$

b) • Soit $u \in \mathcal{S}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
u \in \mathrm{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id}) &\Leftrightarrow T(u) = \lambda u \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \lambda u_n \\
&\Leftrightarrow u \text{ est géométrique de raison } \lambda.
\end{aligned}$$

Donc, $\mathrm{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id})$ est l'espace des suites géométriques de raison λ : $\mathrm{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\left((\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}\right)$.
• D'autre part, pour $\mathcal{S}$,

$$u \in \mathrm{Ker}\left(T^3 - T^2 + p^2 q \mathrm{Id}\right) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - u_{n+2} + p^2 q u_n = 0.$$

• $P=(X-p)Q=(X-p)(X-r_1)(X-r_2)$. $Q(p)=p^2-(1-p)p-p(1-p)=p(3p-2)$. Si $p\neq\dfrac{2}{3}$, $Q(p)\neq 0$ puis $p\neq r_1$ et $p\neq r_2$.

1er cas. On suppose que $p\neq\dfrac{2}{3}$. Les polynômes $X-p$, $X-r_1$ et $X-r_2$ sont deux à deux premiers entre eux car les nombres p, r_1 et r_2 sont deux à deux distincts. D'après le théorème de décomposition des noyaux,

$$\mathrm{Ker}\left(T^3-T^2+p^2q\mathrm{Id}\right)=\mathrm{Ker}(P(T))=\mathrm{Ker}\left(T-p\mathrm{Id}\right)\oplus\mathrm{Ker}\left(T-r_1\mathrm{Id}\right)\oplus\mathrm{Ker}\left(T-r_2\mathrm{Id}\right).$$

Donc, $\mathrm{Ker}\left(T^3-T^2+p^2q\mathrm{Id}\right)$ est l'ensemble des suites de la forme $\left(ap^n+br_1^n+cr_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

L'ensemble des suites réelles u vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+3}-u_{n+2}+p^2qu_n=0$ est l'ensemble des suites de la forme $\left(ap^n+br_1^n+cr_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

2ème cas. On suppose que $p=\dfrac{2}{3}$. $P=X^3-X^2+\dfrac{4}{27}=\left(X-\dfrac{2}{3}\right)\left(X^2-\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{9}\right)=\left(X-\dfrac{2}{3}\right)^2\left(X+\dfrac{1}{3}\right)$. Dans ce cas, le théorème de décomposition des noyaux fournit $\mathrm{Ker}(P(T))=\mathrm{Ker}\left(\left(T-\dfrac{2}{3}\right)^2\right)\oplus\mathrm{Ker}\left(T+\dfrac{1}{3}\mathrm{Id}\right)$. Ensuite, pour $u\in\mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}u\in\mathrm{Ker}\left(\left(T-\frac{2}{3}\right)^2\right)&\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N},\ \left(u_{n+2}-\frac{2}{3}u_{n+1}\right)-\frac{2}{3}\left(u_{n+1}-\frac{2}{3}u_n\right)=0\\&\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}-\frac{4}{3}u_{n+1}+\frac{4}{9}-u_n=0.\end{aligned}$$

L'équation caractéristique associée à cette récurrence double est $z^2-\dfrac{4}{3}z+\dfrac{4}{9}=0$ ou encore $\left(z-\dfrac{2}{3}\right)^2=0$. L'équation caractéristique admet une solution double à savoir $\dfrac{2}{3}$. Les solutions de la récurrence double sont les suites de la forme $\left((an+b)\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, puis l'ensemble des suites réelles u vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+3}-u_{n+2}+p^2qu_n=0$ est l'ensemble des suites de la forme $\left((an+b)\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+c\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

c) Quand $n=1$, $p^2\dfrac{r_1^{n-1}-r_2^{n-1}}{r_1-r_2}=p^2\dfrac{1-1}{r_1-r_2}=0=p_1$.

Quand $n=2$, $p^2\dfrac{r_1^{n-1}-r_2^{n-1}}{r_1-r_2}=p^2\dfrac{r_1-r_2}{r_1-r_2}=p^2=p_2$.

Quand $n=3$, $p^2\dfrac{r_1^{n-1}-r_2^{n-1}}{r_1-r_2}=p^2\dfrac{r_1^2-r_2^2}{r_1-r_2}=p^2\left(r_1+r_2\right)=p^2q=p_3$.

Ainsi, si (p'_n) est la suite $\left(p^2\dfrac{r_1^{n-1}-r_2^{n-1}}{r_1-r_2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}=\left(0p^n+\dfrac{p^2}{r_1\left(r_1-r_2\right)}r_1^n-\dfrac{p^2}{r_2\left(r_1-r_2\right)}r_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, alors $p'_1=p_1$, $p'_2=p_2$, $p'_3=p_3$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $p'_{n+3}=p'_{n+2}-p^2qp'_n$. Par récurrence, on a $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $p'_n=p_n$. Donc,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ p_n=p^2\frac{r_1^{n-1}-r_2^{n-1}}{r_1-r_2}.$$

d) $r_1=\dfrac{1-p+\sqrt{(1-p)(1+3p)}}{2}$ et $r_2=\dfrac{1-p-\sqrt{(1-p)(1+3p)}}{2}$. Si de plus, $p=q=\dfrac{1}{2}$, $r_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $r_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$ puis

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ p_n=\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}\right).$$

3) *Temps d'attente moyen de la première suite de deux Faces consécutifs*

a) $|r_1|<\dfrac{1+3}{4}=1$ $|r_2|\leqslant|r_1|<1$. Donc,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} p_n &= \frac{p^2}{r_1-r_2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(r_1^{n-1}-r_2^{n-1}\right) = \frac{p^2}{r_1-r_2}\left(\frac{1}{1-r_1}-\frac{1}{1-r_2}\right)\\ &= \frac{p^2}{r_1-r_2}\times\frac{r_1-r_2}{(1-r_1)(1-r_2)} = \frac{p^2}{1-(r_1+r_2)+r_1r_2} = \frac{p^2}{1-q-pq} = \frac{p^2}{p-pq}\\ &= \frac{p^2}{p(1-q)} = 1.\end{aligned}$$

Donc, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$.

b) Pour tout réel $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ puis en dérivant, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Donc,

$$\begin{aligned}E(X_2) &= \sum_{n=1}^{+\infty} np_n = \frac{p^2}{r_1-r_2}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(r_1^{n-1}-r_2^{n-1}\right) = \frac{p^2}{r_1-r_2}\left(\frac{1}{(1-r_1)^2}-\frac{1}{(1-r_2)^2}\right)\\ &= \frac{p^2}{r_1-r_2}\times\frac{(1-r_2)^2-(1-r_1)^2}{((1-r_1)(1-r_2))^2} = \frac{p^2}{r_1-r_2}\times\frac{(r_1-r_2)(2-(r_1+r_2))}{(p^2)^2}\\ &= \frac{2-q}{p^2} = \frac{1+p}{p^2}.\end{aligned}$$

Donc, $E(X_2) = \dfrac{3-p}{p^2}$.

c) Quand $p = \dfrac{1}{2}$, on obtient $E(X_2) = \dfrac{3/2}{1/4} = 6$.

Partie II. Première obtention de r Faces consécutifs ($r \in \mathbb{N}^*$)

4) *Fonction génératrice de la suite* (p_n)

a) Les événements E_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sont deux à deux disjoints. Donc,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n\right) \leqslant 1 < +\infty.$$

La série de terme général p_n converge et sa somme est inférieure ou égale à 1.

b) Soit $x \in [-1,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $|p_n x^n| = p_n|x|^n \leqslant p_n$. On en déduit que la série numérique de terme général $p_n x^n$ est absolument convergente et donc convergente. Ainsi, la fonction G est définie sur $[-1,1]$ (au moins).

c) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1,1]$, posons $f_n(x) = p_n x^n$. La question précédente montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty \leqslant p_n$ (et même $\|f_n\|_\infty = p_n$). Donc, la série de fonctions de terme général converge normalement et en particulier uniformément vers G sur $[-1,1]$. Puisque chaque fonction g_n est continue sur $[-1,1]$, on en déduit que G est continue sur $[-1,1]$.

5) *Temps d'attente moyen de la première suite de* r *faces consécutifs*

a) On a $E_{n+r+1} = \underbrace{F_{n+r+1}\cap F_{n+r}\cap\ldots\cap F_{n+2}}_{r}\cap P_{n+1}\cap\overline{E_n}\cap\ldots\cap\overline{E_2}\cap\overline{E_1}$ et donc comme à la question 1)

$$p_{n+r+1} = p^r q\left(1-\sum_{k=1}^{n} p_k\right) = p^r q\left(1-\sum_{k=0}^{n} p_k\right).$$

b) Les deux séries entières $\sum p_n x^n$ et $\sum x^n$ ont un rayon de convergence au moins égal à 1. On peut effectuer leur produit de Cauchy sur $]-1,1[$. Pour $|x| < 1$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} p_k\right)x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = \frac{G(x)}{1-x}.$$

c) Soit $x \in]-1,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_{n+r+1}x^{n+r+1} = p^r q\left(1-\sum_{k=0}^{n} p_k\right)x^{n+r+1}$$

puis en sommant

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_{n+r+1}x^{n+r+1} = p^r q\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+r+1} - \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} p_k\right)x^{n+r+1}\right).$$

En tenant compte de $p_0 = p_1 = \ldots = p_{r-1} = 0$ et $p_r = p^r$, on obtient

$$G(x) - p^r x^r = p^r q\left(\frac{x^{r+1}}{1-x} - x^{r+1}\frac{G(x)}{1-x}\right)$$

puis

$$G(x)\left(1 + p^r q\frac{x^{r+1}}{1-x}\right) = p^r x^r\left(1 + \frac{qx}{1-x}\right)$$

et finalement

$$G(x) = \frac{p^r x^r(1-(1-q)x}{p^r q x^{r+1} - x + 1} = \frac{p^r x^r(1-px)}{1-x+p^r q x^{r+1}}.$$

d) Puisque G est continue sur $[-1,1]$ et en particulier en 1,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = G(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} G(x) = \frac{p^r(1-p)}{p^r q} = 1.$$

Pour tout réel $x \in [-1,1]$,

$$G'(x) = p^r\frac{\left(rx^{r-1} - p(r+1)x^r\right)\left(1-x+p^r q x^{r+1}\right) - \left(x^r - px^{r+1}\right)\left(-1+p^r q(r+1)x^r\right)}{\left(1-x+p^r q x^{r+1}\right)^2},$$

puis

$$\begin{aligned}
G'(1) &= p^r\frac{(r-p(r+1))\,(p^r q) - (1-p)\,(-1+p^r q(r+1))}{(p^r q)^2}\\
&= \frac{(r-p(r+1))\,p^r - (-1+p^r q(r+1))}{p^r q} = \frac{rp^r - (r+1)p^{r+1} + 1 - (r+1)p^r(1-p)}{p^r q}\\
&= \frac{1-p^r}{p^r q}.
\end{aligned}$$

Maintenant, on sait que X_r admet une espérance si et seulement si G est dérivable en 1 et que dans ce cas, $E(X_r) = G'(1)$. Donc,

$$E(X_r) = \frac{1-p^r}{p^r q}.$$

Quand $r = 2$, on retrouve $E(X_2) = \dfrac{1-p^2}{p^2 q} = \dfrac{(1-p)(1+p)}{p^2(1-p)} = \dfrac{1+p}{p^2}$.

e) Quand $p = q = \dfrac{1}{2}$, on obtient plus particulièrement

$$E(X_r) = \frac{1-\dfrac{1}{2^r}}{\dfrac{1}{2^{r+1}}} = 2^{r+1} - 2,$$

(et quand $r = 2$, on retrouve $E(X_2) = 6$).

