

# Polynésie septembre 2015. Enseignement de spécialité

## EXERCICE 4 (5 points) (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on appelle  $S(n)$  le nombre égal à la somme des diviseurs positifs de  $n$ .

- 1) Vérifier que  $S(6) = 12$  et calculer  $S(7)$ .
- 2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2,  $S(n) \geq 1 + n$ .  
b) Quels sont les entiers naturels  $n$  tels que  $S(n) = 1 + n$  ?
- 3) On suppose dans cette question que  $n$  s'écrit  $p \times q$  où  $p$  et  $q$  sont des nombres premiers distincts.
  - a) Démontrer que  $S(n) = (1 + p)(1 + q)$ .
  - b) On considère la proposition suivante :  
« Pour tous entiers naturels  $n$  et  $m$  non nuls distincts,  $S(n \times m) = S(n) \times S(m)$  ».  
Cette proposition est-elle vraie ou fausse ? Justifier.
- 4) On suppose dans cette question que l'entier  $n$  s'écrit  $p^k$ , où  $p$  est un nombre premier et  $k$  un nombre entier naturel non nul.
  - a) Quels sont les diviseurs de  $n$  ?
  - b) En déduire que  $S(n) = \frac{1 - p^{k+1}}{1 - p}$ .
- 5) On suppose dans cette question que  $n$  s'écrit  $p^{13} \times q^7$ , où  $p$  et  $q$  sont des nombres premiers distincts.
  - a) Soit  $m$  un entier naturel.  
Démontrer que  $m$  divise  $n$  si, et seulement si, il existe deux nombres entiers  $s$  et  $t$  avec  $0 \leq s \leq 13$  et  $0 \leq t \leq 7$  tels que  $m = p^s \times q^t$ .
  - b) Démontrer que  $S(n) = \frac{1 - p^{14}}{1 - p} \times \frac{1 - q^8}{1 - q}$ .