Polynésie septembre 2015. Enseignement de spécialité

EXERCICE 4 (5 points) (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Pour tout entier naturel n non nul, on appelle $S(n)$ le nombre égal à la somme des diviseurs positifs de n.

1) Vérifier que $S(6) = 12$ et calculer $S(7)$.

2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $S(n) \geqslant 1 + n$.

b) Quels sont les entiers naturels n tels que $S(n) = 1 + n$?

3) On suppose dans cette question que n s'écrit $p \times q$ où p et q sont des nombres premiers distincts.

a) Démontrer que $S(n) = (1 + p)(1 + q)$.

b) On considère la proposition suivante :
« Pour tous entiers naturels n et m non nuls distincts, $S(n \times m) = S(n) \times S(m)$ ».
Cette proposition est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

4) On suppose dans cette question que l'entier n s'écrit p^k, où p est un nombre premier et k un nombre entier naturel non nul.

a) Quels sont les diviseurs de n ?

b) En déduire que $S(n) = \dfrac{1 - p^{k+1}}{1 - p}$.

5) On suppose dans cette question que n s'écrit $p^{13} \times q^7$, où p et q sont des nombres premiers distincts.

a) Soit m un entier naturel.
Démontrer que m divise n si, et seulement si, il existe deux nombres entiers s et t avec $0 \leqslant s \leqslant 13$ et $0 \leqslant t \leqslant 7$ tels que $m = p^s \times q^t$.

b) Démontrer que $S(n) = \dfrac{1 - p^{14}}{1 - p} \times \dfrac{1 - q^8}{1 - q}$.

Polynésie 2015. Enseignement de spécialité

EXERCICE 4 : corrigé

1) Les diviseurs de 6 sont 1, 2, 3 et 6. Donc,

$$S(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12.$$

Les diviseurs de 7 sont 1 et 7. Donc,

$$S(7) = 1 + 7 = 8.$$

2) a) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. 1 et n sont des diviseurs positifs de n et 1 et n sont distincts. Donc $S(n) = 1 + n + \ldots$
En particulier, $S(n) \geqslant n + 1$.

b) $S(n) = n + 1$ si et seulement si n n'admet pas d'autre diviseur positifs que 1 et n ou encore $S(n) = n + 1$ si et seulement si n est premier.

3) a) n admet exactement quatre diviseurs positifs deux à deux distincts à savoir 1, p, q et pq. Donc,

$$S(n) = 1 + p + q + pq = (1 + p) + (1 + p)q = (1 + p)(1 + q).$$

b) $S(2) = 3$ et $S(4) = 1 + 2 + 4 = 7$. Donc, $S(2) \times S(4) = 3 \times 7 = 21$. D'autre part,

$$S(2 \times 4) = S(8) = 1 + 2 + 4 + 8 = 15.$$

Ainsi, $S(2 \times 4) \neq S(2) \times S(4)$. La proposition de l'énoncé est donc fausse.

4) a) Les diviseurs de n sont les nombres de la forme p^j où $0 \leqslant j \leqslant k$.

b) Donc, puisque $p \neq 1$,

$$S(n) = 1 + p + p^2 + \ldots + p^k = \frac{1 - p^{k+1}}{1 - p}.$$

5) a) • Soient s et t deux entiers tels que $0 \leqslant s \leqslant 13$ et $0 \leqslant t \leqslant 7$ puis $m = p^s \times q^t$. Alors,

$$n = p^{13} \times q^7 = \left(p^{13-s} \times q^{7-t}\right) \times \left(p^s \times q^t\right) = \left(p^{13-s} \times q^{7-t}\right) \times m.$$

où de plus $13 - s$ et $7 - t$ sont des entiers positifs. Donc, en posant $K = p^{13-s} \times q^{7-t}$, K est un entier tel que $n = Km$. Ceci montre que m divise n.

• Réciproquement, soit m un entier strictement positif qui est un diviseur de n. Si $m = 1$, m s'écrit $p^0 \times q^0$. m est donc du type $p^s \times q^t$ avec $0 \leqslant s \leqslant 13$ et $0 \leqslant t \leqslant 7$.

Sinon, $m \geqslant 2$. Soit r un facteur premier de m. Si $r \neq p$ et $r \neq q$, alors r est premier avec l'entier $n = p^{13} \times q^7$ car n'a pas de facteur premier commun avec n. D'autre part, r divise m et m divise n. Donc, r divise n.
Ainsi, r divise $n = n \times 1$ et r est premier avec n. Donc, r divise 1 d'après le théorème de Gauss. Ceci contredit le fait que r est un nombre premier et donc $r = p$ ou $r = q$.

Ce qui précède montre que dans tous les cas, m est de la forme $p^s \times q^t$ où s et t sont des entiers positifs. Ensuite, n s'écrit sous la forme $m \times K$ où K est un entier qui est aussi un diviseur positif de n. Donc, il existe des entiers naturels s' et t' tels que $K = p^{s'}q^{t'}$. L'égalité $n = Km$ s'écrit :

$$p^{13}q^7 = n = Km = p^{s+s'}q^{t+t'}.$$

Par unicité de la décomposition d'un entier en facteur premier, on a $s + s' = 13$ et $t + t' = 7$ ou encore $s = 13 - s'$ et $t = 7 - t'$. Ceci impose $s \leqslant 13$ et $t \leqslant 7$.

On a montré que les diviseurs de n sont les entiers m de la forme $p^s q^t$ où s et t sont des entiers naturels tels que $0 \leqslant s \leqslant 13$ et $0 \leqslant t \leqslant 7$.

b) Par suite,

$$\begin{aligned}
S(n) &= \left(1 + q + \ldots + q^7\right) + \left(p + pq + \ldots + pq^7\right) + \ldots + \left(p^{13} + p^{13}q + \ldots + p^{13}q^7\right) \\
&= \left(1 + q + \ldots + q^7\right) + p\left(1 + q + \ldots + q^7\right) + \ldots + p^{13}\left(1 + q + \ldots + q^7\right) \\
&= \left(1 + p + \ldots + p^{13}\right)\left(1 + q + \ldots + q^7\right) \\
&= \frac{1 - p^{14}}{1 - p} \times \frac{1 - q^8}{1 - q} \text{ (car } p \neq 1 \text{ et } q \neq 1).
\end{aligned}$$

