

Polynésie 2015. Enseignement de spécialité

EXERCICE 3 : corrigé

1) Le point C a pour coordonnées $(1, 1, 0)$ et le point E a pour coordonnées $(0, 0, 1)$. Le vecteur \overrightarrow{CE} a donc pour coordonnées $(-1, -1, 1)$.

Les points I, J et K ont pour coordonnées respectives $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$ et $\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$. Donc les vecteurs \overrightarrow{IJ} et \overrightarrow{IK} ont pour coordonnées respectives $\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$ et $(0, 1, 1)$.

$$\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{IJ} = (-1) \times \left(-\frac{1}{2}\right) + (-1) \times 1 + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0$$

et

$$\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{IK} = (-1) \times 0 + (-1) \times 1 + 1 \times 1 = -1 + 1 = 0.$$

Ainsi, le vecteur \overrightarrow{CE} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) et donc le vecteur \overrightarrow{CE} est un vecteur normal au plan (IJK) .

2) Le point B a pour coordonnées $(1, 0, 0)$ et le point D a pour coordonnées $(0, 1, 0)$. Le vecteur \overrightarrow{BD} a donc pour coordonnées $(-1, 1, 0)$.

$$\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{BD} = (-1) \times (-1) + (-1) \times 1 + 1 \times 0 = -1 + 1 = 0.$$

Le vecteur \overrightarrow{BD} est orthogonal à un vecteur normal au plan (IJK) et donc la droite (BD) est parallèle au plan (IJK) .

3) La droite (CE) est la droite passant par $C(1, 1, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{CE}(-1, -1, 1)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (CE) est donc

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Soit $M(1 - t, 1 - t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (CE) . Le plan (IJK) est parallèle au plan (BDM) si et seulement si le plan (IJK) est parallèle à deux droites sécantes du plan (BDM) comme les droites (BD) et (BM) . On sait déjà que la droite (BD) est parallèle au plan (IJK) . Puisque le vecteur \overrightarrow{CE} est un vecteur normal au plan (IJK) ,

$$(BDM) \parallel (IJK) \Leftrightarrow (BM) \parallel (IJK) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CE} = 0.$$

Les coordonnées du vecteur \overrightarrow{CE} sont $(-1, -1, 1)$ et les coordonnées du vecteur \overrightarrow{BM} sont $(-t, 1 + t, t)$. Donc,

$$(BDM) \parallel (IJK) \Leftrightarrow (-1) \times (-t) + (-1) \times (1 + t) + 1 \times t = 0 \Leftrightarrow 3t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}.$$

Quand $t = \frac{1}{3}$, on obtient le point $M\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.