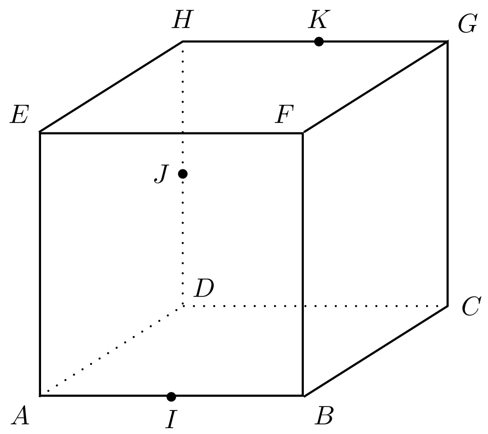
Polynésie septembre 2015. Enseignement de spécialité

EXERCICE 3 (3 points) (commun à tous les candidats)

$ABCDEFGH$ est un cube. I est le milieu de $[AB]$, J est le milieu de $[HD]$ et K est le milieu de $[HG]$.
On se place dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{CE}$ est un vecteur normal au plan (IJK).

2) Démontrer que la droite (BD) est parallèle au plan (IJK).

3) Soit M un point de la droite (CE). Quelle est la position du point M sur la droite (CE) pour laquelle le plan (BDM) est parallèle au plan (IJK) ?

Polynésie 2015. Enseignement de spécialité

EXERCICE 3 : corrigé

1) Le point C a pour coordonnées $(1,1,0)$ et le point E a pour coordonnées $(0,0,1)$. Le vecteur $\overrightarrow{CE}$ a donc pour coordonnées $(-1,-1,1)$.

Les points I, J et K ont pour coordonnées respectives $\left(\frac{1}{2},0,0\right)$, $\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$ et $\left(\frac{1}{2},1,1\right)$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ont pour coordonnées respectives $\left(-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)$ et $(0,1,1)$.

$$\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{IJ} = (-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)+(-1)\times 1+1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}=0$$

et

$$\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{IK}=(-1)\times 0+(-1)\times 1+1\times 1=-1+1=0.$$

Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{CE}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) et donc le vecteur $\overrightarrow{CE}$ est un vecteur normal au plan (IJK).

2) Le point B a pour coordonnées $(1,0,0)$ et le point D a pour coordonnées $(0,1,0)$. Le vecteur $\overrightarrow{BD}$ a donc pour coordonnées $(-1,1,0)$.

$$\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{BD}=(-1)\times(-1)+(-1)\times 1+1\times 0=-1+1=0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{BD}$ est orthogonal à un vecteur normal au plan (IJK) et donc la droite (BD) est parallèle au plan (IJK).

3) La droite (CE) est la droite passant par $C(1,1,0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{CE}(-1,-1,1)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (CE) est donc

$$\left\{\begin{array}{l} x=1-t\\ y=1-t\\ z=t \end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}.$$

Soit $M(1-t,1-t,t)$, $t\in\mathbb{R}$, un point de la droite (CE). Le plan (IJK) est parallèle au plan (BDM) si et seulement si le plan (IJK) est parallèle à deux droites sécantes du plan (BDM) comme les droites (BD) et (BM). On sait déjà que la droite (BD) est parallèle au plan (IJK). Puisque le vecteur $\overrightarrow{CE}$ est un vecteur normal au plan (IJK),

$$(BDM)\parallel(IJK)\Leftrightarrow(BM)\parallel(IJK)\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CE}=0.$$

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{CE}$ sont $(-1,-1,1)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BM}$ sont $(-t,1+t,t)$. Donc,

$$(BDM)\parallel(IJK)\Leftrightarrow(-1)\times(-t)+(-1)\times(1-t)+1\times t=0\Leftrightarrow 3t-1=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{3}.$$

Quand $t=1$, on obtient le point $M\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$.

