France métropolitaine/Réunion. Septembre 2015. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Question 1 D'après la formule des probabilités totales fournit

$$p(B) = p(A) \times p_A(B) + p\left(\overline{A}\right) \times p_{\overline{A}}(B) = 0,6 \times 0,2 + (1 - 0,6) \times 0,3 = 0,12 + 0,12 = 0,24.$$

La bonne réponse est la **réponse c**.

Question 2 La probabilité demandée est $P(T \geqslant 60)$ avec

$$\begin{aligned} P(T \geqslant 60) &= 1 - P(T \leqslant 60) = 1 - \int_0^{60} \lambda e^{-\lambda t}\, dt = 1 - \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^{60} = 1 - \left(-e^{-60\lambda} + e^0\right) \\ &= e^{-60\lambda} = e^{-60\ln 2/30} = e^{-2\ln 2} = \left(e^{\ln 2}\right)^{-2} = 2^{-2} \\ &= \frac{1}{4} = 0,25. \end{aligned}$$

La bonne réponse est la **réponse b**.

Question 3 $P(X \geqslant 135) = P(X \leqslant \mu + \sigma)$. On sait que $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) = 0,683$ arrondi au millième et donc, pour des raisons de symétrie

$$P(X \geqslant 135) = \frac{1 - P(X \leqslant \mu + \sigma)}{2} = 0,159 \text{ arrondi au millième.}$$

La bonne réponse est la **réponse a**.

Question 4 L'intervalle doit être centré en $0,5$ ce qui élimine les réponses a, b et d. La bonne réponse est la **réponse c**.

Question 5 Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% est $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ où f est la fréquence de personnes de plus de 60 ans observée dans l'échantillon et n est l'effectif de l'échantillon. L'amplitude de cet intervalle de confiance est $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant 0,05 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{5}{100} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{2} \geqslant \frac{100}{5} \Leftrightarrow \sqrt{n} \geqslant 40 \Leftrightarrow n \geqslant 1600.$$

La bonne réponse est la **réponse c**.

EXERCICE 2

Partie A

1) Soit n un entier naturel. D'après la relation de CHASLES

$$I_{n+1} = \int_0^{n+1} f(x)\ dx = \int_0^{n} f(x)\ dx + \int_n^{n+1} f(x)\ dx = I_n + \int_n^{n+1} f(x)\ dx,$$

et donc

$$I_{n+1} - I_n = \int_n^{n+1} f(x)\ dx.$$

Puisque la fonction f est continue et positive sur $[0, +\infty[$ et donc sur $[n, n+1]$, par positivité de l'intégrale, $\int_n^{n+1} f(x)\ dx \geqslant 0$ ou encore $I_{n+1} - I_n \geqslant 0$.

On a montré que pour tout entier naturel n, $I_{n+1} - I_n \geqslant 0$ ou encore $I_{n+1} \geqslant I_n$ et donc

la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2) a) Soit n un entier naturel. Pour tout réel x de $[0, n]$, $e^x - x \geqslant \dfrac{e^x}{2} > 0$ puis $\dfrac{1}{e^x - x} \leqslant \dfrac{2}{e^x}$ par décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur $]0, +\infty[$. En multipliant les deux membres de la dernière inégalité pat le réel positif x, on obtient $\dfrac{x}{e^x - x} \leqslant \dfrac{2x}{e^x}$ ou encore $f(x) \leqslant 2xe^{-x}$. Ainsi, pour tout réel x de $[0, n]$, $f(x) \leqslant 2xe^{-x}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$I_n = \int_0^n f(x)\ dx \leqslant \int_0^n 2xe^{-x}\ dx.$$

b) La fonction H est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel positif x,

$$H'(x) = (-1) \times e^{-x} + (-x - 1) \times \left(-e^{-x}\right) = -e^{-x} + (x + 1)e^{-x} = (-1 + x + 1)e^{-x} = xe^{-x}.$$

c) Ainsi, la fonction $2H$ est une primitive de la fonction $x \mapsto 2xe^{x}$ sur $[0, +\infty[$.

Soit n un entier naturel.

$$\int_0^n 2xe^{-x}\ dx = [2H(x)]_0^n = 2(-n - 1)e^{-x} - 2(0 - 1)e^0 = 2 - 2(n + 1)e^{-n}.$$

D'après la question 2)a),

$$I_n \leqslant 2 - 2(n + 1)e^{-n} \leqslant 2,$$

car $(n + 1)e^{-x} \geqslant 0$.

3) La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante d'après la question 1) et est majorée par 2 d'après la question 2)c). On en déduit que

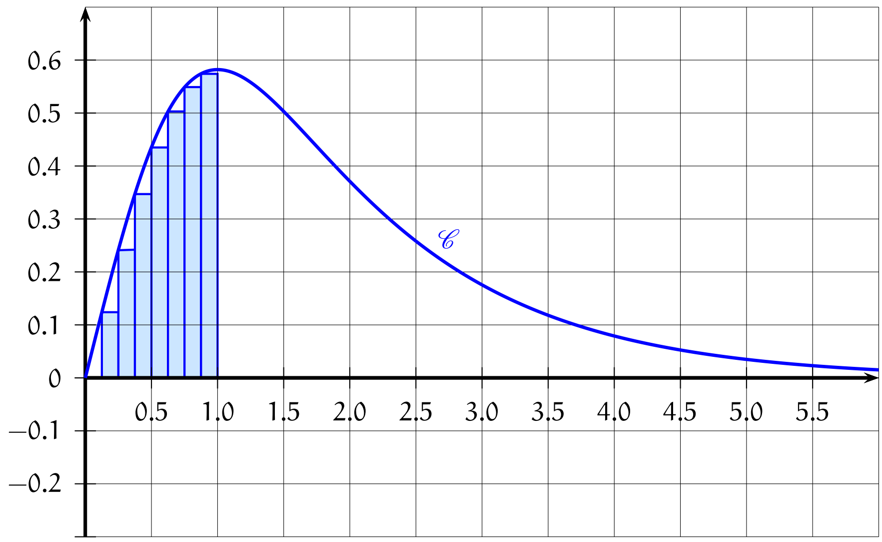
la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Partie B

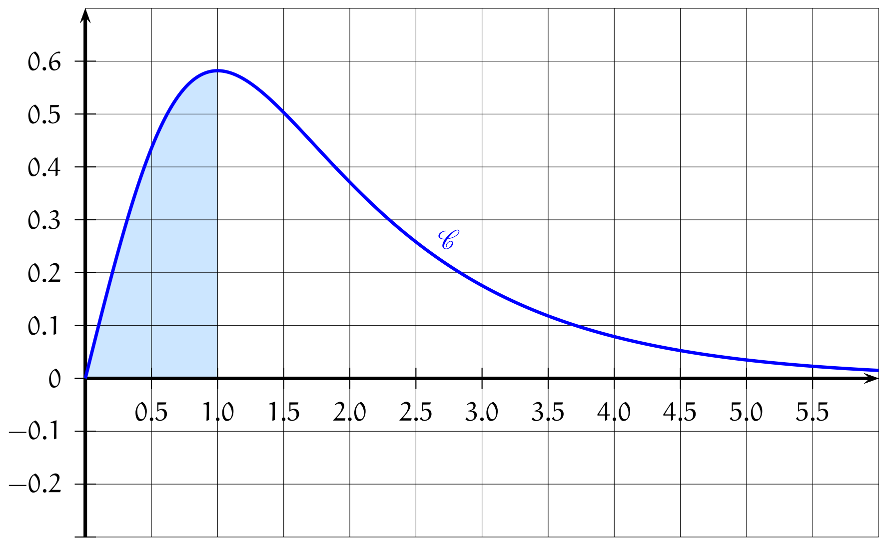
1) Valeurs successives de A

i	A	x
1	0	0,25
2	0,060	0,5
3	0,169	0,75
4	0,306	1

2) La dernière valeur de A affichée par l'algorithme est la somme des aires des rectangles ci-dessous



3) L'algortihtme fournit une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ obtenue par la méthode des rectangles avec un pas de $\dfrac{1}{K}$. Quand K devient très grand, l'alorithme affiche une très bonne valeur approchée de cette intégrale ou encore une très bonne valeur approchée de l'aire ci-dessous :



EXERCICE 3

1) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-2, 1, 0)$. La droite (AB) est la droite passant par $A(0, 1, -1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(-2, 1, 0)$. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

$$\left\{\begin{array}{l} x = -2s \\ y = 1 + s \\ z = -1 \end{array}\right., \ s \in \mathbb{R}.$$

2) a) La droite (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB}(-2, 1, 0)$ et la droite $\mathscr{D}$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(1, 1, -1)$. S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{AB}$, la troisième coordonnée fournit $-1 = k \times 0$ ce qui est impossible. Donc, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires ou encore les droites $\mathscr{D}$ et (AB) ne sont pas parallèles.

b) On en déduit que les droites $\mathscr{D}$ et (AB) sont sécantes ou non coplanaires.

Soit $M(-2 + t, 1 + t, -1 - t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite $\mathscr{D}$ et $N(-2s, 1 + s, -1)$, $s \in \mathbb{R}$, un point de la droite (AB).

$$M = N \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2 + t = -2s \\ 1 + t = 1 + s \\ -1 - t = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 0 \\ -2s = -2 \\ 1 + s = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 0 \\ s = 1 \\ s = 0 \end{array}\right. .$$

Ce système d'équations n'a pas de solution ou encore les droites $\mathscr{D}$ et (AB) n'ont pas de point commun. Les droites $\mathscr{D}$ et (AB) ne sont donc pas sécantes.

3) Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est le vecteur de coordonnées $(1, 1, -1)$. Ce vecteur normal est aussi un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$. Donc, la droite $\mathscr{D}$ est orthogonale au plan $\mathscr{P}$. De plus,

$$x_M + y_M - z_M - 3u = (-2 + u) + (1 + u) - (-1 - u) - 3u = u(1 + 1 + 1 - 3) + (-2 + 1 + 1) = 0.$$

Donc, le plan $\mathscr{P}$ passe par le point M.

4) Soit $N(-2s, 1 + s, -1)$, $s \in \mathbb{R}$, un point de la droite (AB).

$$N \in \mathscr{P} \Leftrightarrow (-2s) + (1 + s) - (-1) - 3u = 0 \Leftrightarrow -s + 2 - 3u = 0 \Leftrightarrow s = 2 - 3u.$$

Pour $s = 2 - 3u$, on obtient le point $N(-4 + 6u, 3 - 3u, -1)$.

5) a) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sont $((-4 + 6u) - (-2 + u), (3 - 3u) - (1 + u), (-1) - (-1 - u))$ ou encore $(-2 + 5u, 2 - 4u, u)$. La droite $\mathscr{D}$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}(1, 1, -1)$.

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{v} = (-2 + 5u) + (2 - 4u) - u = 0.$$

Donc, la droite (MN) et la droite $\mathscr{D}$ sont orthogonales. De plus, les droites (MN) et $\mathscr{D}$ sont sécantes en M et finalement, la droite (MN) et la droite $\mathscr{D}$ sont perpendiculaires.

b)

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{v} = (-2) \times (-2 + 5u) + 1 \times (2 - 4u) + 0 \times (-u) = 6 - 14ux.$$

Par suite, les droites (MN) et (AB) sont perpendiculaires si et seulement si $u = \dfrac{3}{7}$.

6) a)

$$\begin{aligned} MN^2 &= (-2 + 5u)^2 + (2 - 4u)^2 + (-u)^2 = 25u^2 - 20u + 4 + 16u^2 - 16u + 4 + u^2 \\ &= 42u^2 - 36u + 8. \end{aligned}$$

b) Pour $u \in \mathbb{R}$, posons $f(u) = 42u^2 - 36u + 8$. On sait que $f(u)$ est minimal si et seulement si $f'(u) = 0$ avec $f'(u) = 84u - 36$. Donc, MN^2 est minimal pour $u = \dfrac{36}{84}$ ou encore $u = \dfrac{3}{7}$.

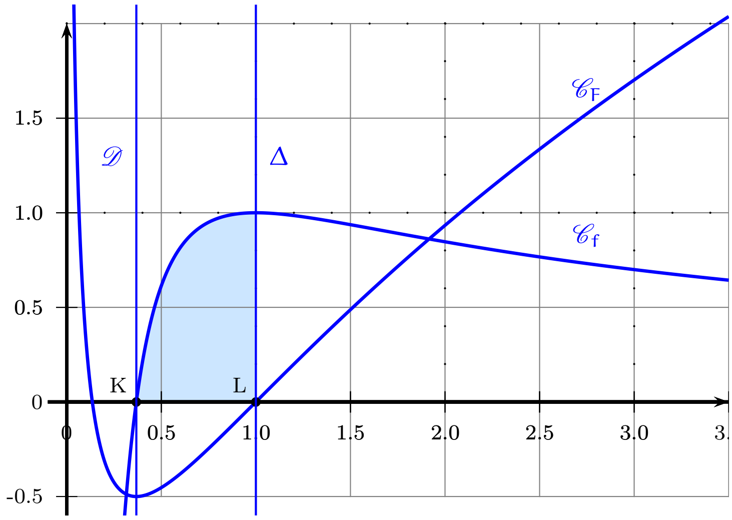
Enfin, MN est minimal si et seulement si MN^2 est minimal. Donc, MN est minimal pour $u = \dfrac{3}{7}$ ce qui correspons à la situation où les droites (MN) et (AB) sont perpendiculaires.

EXERCICE 4.

1) Notons x_K l'abscisse du point K. Par définition du point K, on a $f(x_K) = 0$ ou encore $F'(x_K) = 0$. Ainsi, en le point de $\mathscr{C}_F$ de même abscisse que K, $\mathscr{C}_F$ a une tangente parallèle à l'axe des abscisses. Ceci ne se produit que dans la **Situation 2**.

Les graphes exacts sont donc les graphes de la situation 2.

2) a) En analysant le nombre de carreaux contenu dans le domaine ci-dessous, l'aire est approximativement égale à 2 fois l'aire d'un carreau ou encore $2 \times 0,25$ unité d'aire ou enfin $0,5$ unité d'aire.



b) Déterminons d'abord l'abscisse du point K. Soit x un réel strictement positif.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}(1 + \ln(x)) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}.$$

Le point K a pour abscisse $\frac{1}{e}$. D'autre part, la fonction f est continue et positive sur $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$. Donc, l'aire cherchée, exprimée en unité d'aire est

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\ln(x)\right)\,dx = \left[\ln(x) + \frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_{\frac{1}{e}}^{1} \\ &= \left(\ln(1) + \frac{1}{2}(\ln(1))^2\right) - \left(\ln(1/e) + \frac{1}{2}(\ln(1/e))^2\right) = -\left(-1 + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} = 0,5.\end{aligned}$$

L'aire cherchée est égale à $0,5$ unité d'aire.

