France métropolitaine/Réunion septembre 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (7 points) (commun à tous les candidats)

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ telle que :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}$$

On admet que la fonction f est positive sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal du plan.
La courbe $\mathscr{C}$ est représentée en annexe, **à rendre avec la copie**.

Partie A

Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,dx$.

On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

1) Montrer que la suite (I_n) est croissante.

2) On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, $e^x - x \geqslant \dfrac{e^x}{2}$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^n 2xe^{-x}\,dx$.

b) Soit H la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$ telle que :

$$H(x) = (-x-1)e^{-x}.$$

Déterminer la fonction dérivée H' de la fonction H.

c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $I_n \leqslant 2$.

3) Montrer que la suite (I_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

Partie B

On considère l'algorithme suivant dans lequel les variables sont
- K et i des entiers naturels, K étant non nul ;
- A, x et h des réels.

Entrée	Saisir K entier naturel non nul
Initialisation	Affecter à A la valeur 0 Affecter à x la valeur 0 Affecter à h la valeur $\dfrac{1}{K}$
Traitement	Pour i variant de 1 à K Affecter à A la valeur $A + h \times f(x)$ Affecter à x la valeur $x + h$ Fin Pour
Sortie	Afficher A

1) Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $K = 4$.
Les valeurs successives de A seront arrondies au millième.

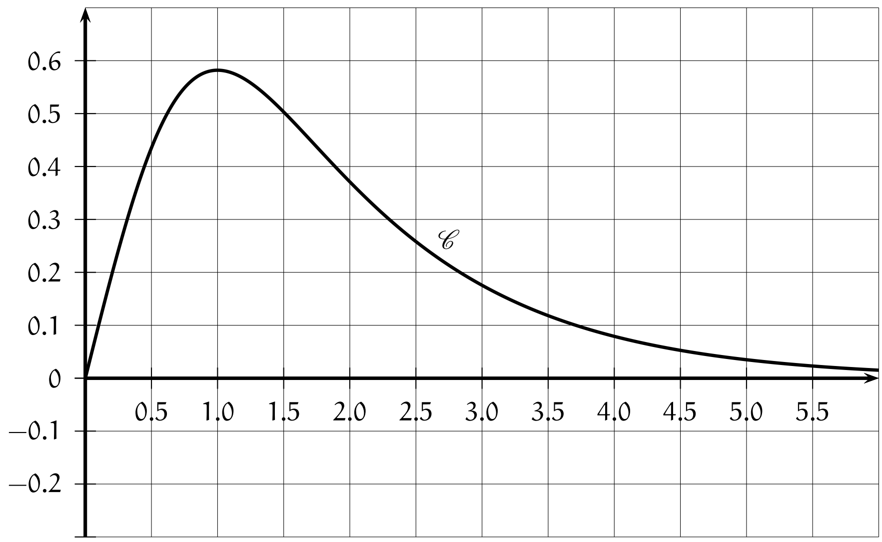
i	A	x
1		
2		
3		
4		

2) En l'illustrant sur l'annexe **à rendre avec la copie**, donner une interprétation graphique du résultat affiché par cet algorithme pour $K = 8$.

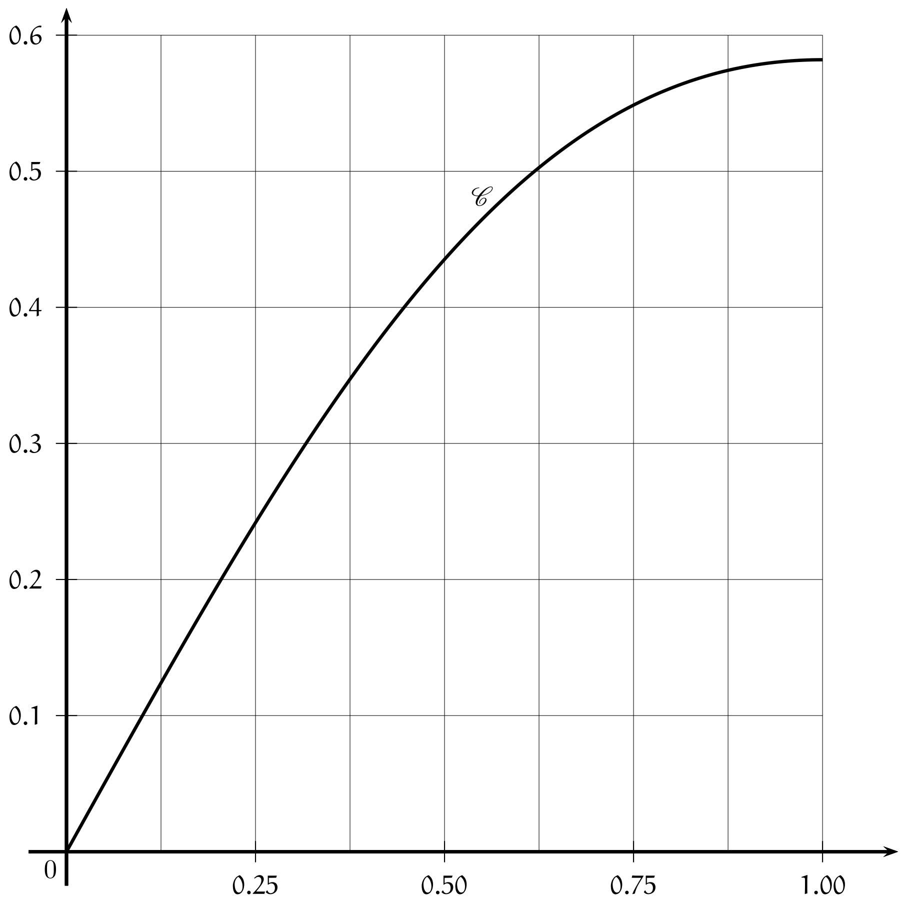
3) Que donne l'algorithme lorsque K devient grand ?

Annexe, Exercice 2

Courbe $\mathscr{C}$, représentative de la fonction f sur $[0, 6]$.



Courbe $\mathscr{C}$, représentative de la fonction f sur $[0, 1]$



France métropolitaine/Réunion septembre 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

Partie A

1) Soit n un entier naturel. D'après la relation de CHASLES

$$I_{n+1} = \int_0^{n+1} f(x)\ dx = \int_0^n f(x)\ dx + \int_n^{n+1} f(x)\ dx = I_n + \int_n^{n+1} f(x)\ dx,$$

et donc

$$I_{n+1} - I_n = \int_n^{n+1} f(x)\ dx.$$

Puisque la fonction f est continue et positive sur $[0, +\infty[$ et donc sur $[n, n+1]$, par positivité de l'intégrale, $\int_n^{n+1} f(x)\ dx \geqslant 0$ ou encore $I_{n+1} - I_n \geqslant 0$.

On a montré que pour tout entier naturel n, $I_{n+1} - I_n \geqslant 0$ ou encore $I_{n+1} \geqslant I_n$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

2) a) Soit n un entier naturel. Pour tout réel x de $[0, n]$, $e^x - x \geqslant \dfrac{e^x}{2} > 0$ puis $\dfrac{1}{e^x - x} \leqslant \dfrac{2}{e^x}$ par décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sur $]0, +\infty[$. En multipliant les deux membres de la dernière inégalité pat le réel positif x, on obtient $\dfrac{x}{e^x - x} \leqslant \dfrac{2x}{e^x}$ ou encore $f(x) \leqslant 2xe^{-x}$. Ainsi, pour tout réel x de $[0, n]$, $f(x) \leqslant 2xe^{-x}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$I_n = \int_0^n f(x)\ dx \leqslant \int_0^n 2xe^{-x}\ dx.$$

b) La fonction H est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel positif x,

$$H'(x) = (-1) \times e^{-x} + (-x - 1) \times \left(-e^{-x}\right) = -e^{-x} + (x + 1)e^{-x} = (-1 + x + 1)e^{-x} = xe^{-x}.$$

c) Ainsi, la fonction $2H$ est une primitive de la fonction $x \mapsto 2xe^{x}$ sur $[0, +\infty[$.

Soit n un entier naturel.

$$\int_0^n 2xe^{-x}\ dx = [2H(x)]_0^n = 2(-n - 1)e^{-x} - 2(0 - 1)e^0 = 2 - 2(n + 1)e^{-n}.$$

D'après la question 2)a),

$$I_n \leqslant 2 - 2(n + 1)e^{-n} \leqslant 2,$$

car $(n + 1)e^{-x} \geqslant 0$.

3) La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante d'après la question 1) et est majorée par 2 d'après la question 2)c). On en déduit que

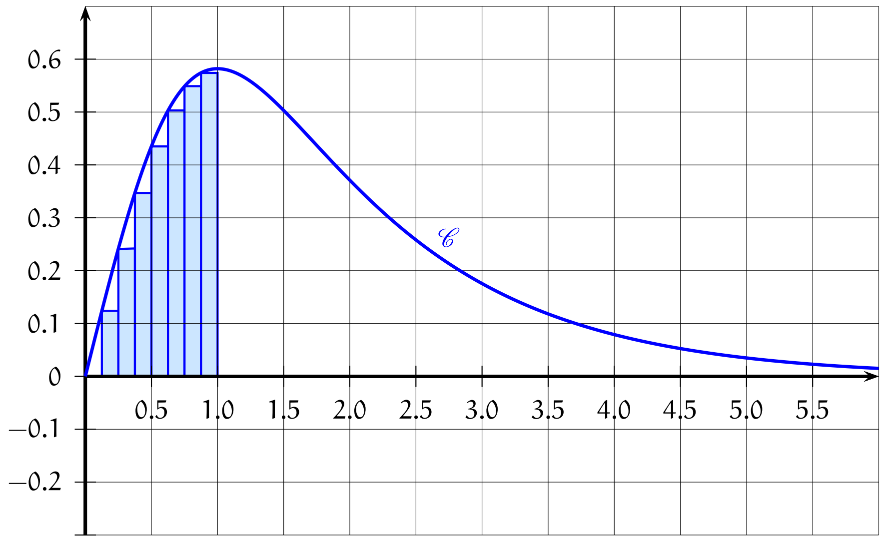
$$\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente.}}$$

Partie B

1) Valeurs successives de A

i	A	x
1	0	0,25
2	0,060	0,5
3	0,169	0,75
4	0,306	1

2) La dernière valeur de A affichée par l'algorithme est la somme des aires des rectangles ci-dessous



3) L'algortihtme fournit une valeur approchée de $\int_0^1 f(x)\,dx$ obtenue par la méthode des rectangles avec un pas de $\frac{1}{K}$. Quand K devient très grand, l'alorithme affiche une très bonne valeur approchée de cette intégrale ou encore une très bonne valeur approchée de l'aire ci-dessous :