

**BACCALAUREAT GENERAL**

**MATHEMATIQUES**

**Série S**

**Enseignement de Spécialité**

*Durée de l'épreuve : 4 heures*

*Coefficient : 9*

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le candidat doit traiter tous les exercices.  
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour  
une part importante dans l'appréciation des copies.*

## EXERCICE 1 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

On considère la fonction  $f_n$  définie et dérivable sur l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels par

$$f_n(x) = x^2 e^{-2nx}.$$

On note  $\mathcal{C}_n$  la courbe représentative de la fonction  $f_n$  dans un repère orthogonal.

On définit, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ .

### Partie A : étude de la fonction $f_1$

1) La fonction  $f_1$  est définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_1(x) = x^2 e^{-2x}$ .

On admet que  $f_1$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on note  $f_1'$  sa dérivée.

a) Justifier que pour tout réel  $x$ ,  $f_1'(x) = 2xe^{-2x}(1-x)$ .

b) Etudier les variations de la fonction  $f_1$  sur  $\mathbb{R}$ .

c) Déterminer la limite de  $f_1$  en  $-\infty$ .

d) Vérifier que pour tout réel  $x$ ,  $f_1(x) = \left(\frac{x}{e^x}\right)^2$ . En déduire la limite de  $f_1$  en  $+\infty$ .

2) En utilisant un système de calcul formel, on trouve qu'une primitive  $F_1$  de la fonction  $f_1$  est donnée

$$\text{par } F_1(x) = -e^{-2x} \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right).$$

En déduire la valeur exacte de  $I_1$ .

### Partie B : étude de la suite $(I_n)$

1) Soit  $n$  un entier naturel non nul.

a) Interpréter graphiquement la quantité  $I_n$ .

b) Emettre alors une conjecture sur le sens de variation et sur la limite éventuelle de la suite  $(I_n)$ .  
Expliciter la démarche qui a mené à cette conjecture.

2) a) Justifier que, pour tout entier naturel  $n$  non nul et pour tout réel  $x$  appartenant à  $[0, 1]$ ,

$$f_{n+1}(x) = e^{-2x} f_n(x).$$

b) En déduire, pour tout entier naturel  $n$  non nul et pour tout réel  $x$  appartenant à  $[0, 1]$ ,

$$f_{n+1}(x) \leq f_n(x).$$

c) Déterminer alors le sens de variation de la suite  $(I_n)$ .

3) Soit  $n$  un entier naturel non nul.

a) Justifier que pour tout entier naturel  $n$  non nul et pour tout réel  $x$  appartenant à  $[0, 1]$ ,

$$0 \leq f_n(x) \leq e^{-2nx}.$$

b) En déduire un encadrement de la suite  $(I_n)$ , puis sa limite.

## EXERCICE 2 (5 points )

(commun à tous les candidats)

### Partie A

Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
- 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée  $x$ , où  $x$  est un réel de l'intervalle  $[0, 1]$ .

Par ailleurs, 20% des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les événements suivants :

$R$  : la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange ;

$J$  : la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus ».

- 1) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
- 2) Déterminer la valeur exacte de  $x$ .
- 3) Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ».  
Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

### Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.

On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot.

On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

- 1) Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire  $X$ . On en donnera les paramètres.
- 2) Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de « pur jus ». On arrondira le résultat au millième.

### Partie C

Un fournisseur assure que 90% des bouteilles de sa production de pur jus d'orange contiennent moins de 2% de pulpe. Le service qualité du supermarché prélève un échantillon de 900 bouteilles afin de vérifier cette affirmation. Sur cet échantillon, 766 bouteilles présentent moins de 2% de pulpe.

- 1) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion de bouteilles contenant moins de 2% de pulpe au seuil de 95%.
- 2) Que penser de l'affirmation du fournisseur ?

### EXERCICE 3 (4 points)

(commun à tous les candidats)

*Les trois questions sont indépendantes.*

*Toute réponse doit être justifiée.*

1) On définit une suite  $(u_n)$  de réels strictement positifs par

$$u_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad \ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) - 1.$$

La suite  $(u_n)$  est-elle géométrique ?

2) Soit  $(v_n)$  une suite à termes strictement positifs.

On définit la suite  $(w_n)$  par, pour tout entier naturel  $n$ ,  $w_n = 1 - \ln(v_n)$ .

La proposition  $(\mathcal{P})$  suivante est-elle vraie ou fausse ?

$(\mathcal{P})$  : si la suite  $(v_n)$  est majorée alors la suite  $(w_n)$  est majorée.

3) La suite  $(z_n)$  de nombres complexes est définie par

$$z_0 = 2 + 3i \quad \text{et, pour tout entier naturel } n \quad \text{par } z_{n+1} = \left( \frac{\sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6}}{4} \right) z_n.$$

Pour quelles valeurs de  $n$ ,  $|z_n|$  est-il inférieur ou égal à  $10^{-20}$  ?

## EXERCICE 4 (5 points )

(candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

### Partie A

On considère l'équation

$$51x - 26y = 1$$

où  $x$  et  $y$  sont des nombres entiers relatifs.

- 1) Justifier, en énonçant un théorème du cours, que cette équation admet au moins un couple solution.
- 2) a) Donner un couple solution  $(x_0 ; y_0)$  de cette équation.  
b) Déterminer l'ensemble des couples solutions de cette équation.

### Partie B

On fait correspondre à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Afin de coder une lettre de l'alphabet, correspondant à un entier  $x$  compris entre 0 et 25, on définit une fonction de codage  $f$  par  $f(x) = y$ , où  $y$  est le reste de la division euclidienne de  $51x + 2$  par 26. La lettre de l'alphabet correspondant à l'entier  $x$  est ainsi codée par la lettre correspondant à l'entier  $y$ .

- 1) Coder la lettre N.
- 2) En utilisant la partie A, déterminer l'entier  $a$  tel que  $0 \leq a \leq 25$  et  $51a \equiv 1 [26]$ .
- 3) Démontrer que si la lettre correspondant à un entier  $x$  est codée par une lettre correspondant à un entier  $y$ , alors  $x$  est le reste de la division euclidienne de  $ay + 2$  par 26.
- 4) Déterminer alors la lettre qui est codée par la lettre N.
- 5) On applique 100 fois de suite la fonction de codage  $f$  à un nombre  $x$  correspondant à une certaine lettre. Quelle lettre obtient-on ?