

Antilles Guyane septembre 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

1) a) Le point B a pour coordonnées $(1, 0, 0)$ et le point D a pour coordonnées $(0, 1, 0)$. Donc, le vecteur \overrightarrow{DB} a pour coordonnées $(1, -1, 0)$.

La droite (DB) est la droite passant par $D(0, 1, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{DB}(1, -1, 0)$. Une représentation paramétrique de la droite (DB) est donc

$$\begin{cases} x = s \\ y = 1 - s \\ z = 0 \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$$

b) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$. Donc, le point G a pour coordonnées $(1, 1, 1)$ puis le vecteur \overrightarrow{AG} a pour coordonnées $(1, 1, 1)$.

La droite (AG) est la droite passant par $A(0, 0, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AG}(1, 1, 0)$. Une représentation paramétrique de la droite (AG) est donc

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2) Soient $M(s, 1 - s, 0)$, $s \in \mathbb{R}$, un point de la droite (DB) et $N(t, t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (AG) . Les coordonnées du vecteur \overrightarrow{MN} sont $(t - s, t + s - 1, t)$. A partir des troisième et première coordonnées, si ce vecteur est nul, on a $t = 0$ puis $s = 0$. Mais alors $t + s - 1 = -1 \neq 0$. Donc, les points M et N sont toujours distincts ou encore la droite (MN) est toujours définie.

Puisque M est un point de (DB) et N est un point de (AG) , la droite (MN) est perpendiculaire aux droites (AG) et (DB) si et seulement si la droite (MN) est orthogonale aux droites (AG) et (DB) . Or

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AG} = (t - s) \times 1 + (t + s - 1) \times 1 + t \times 1 = 3t - 1$$

et

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DB} = (t - s) \times 1 + (t + s - 1) \times (-1) + t \times 0 = -2s + 1.$$

Par suite,

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \text{ et } \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow 3t - 1 = 0 \text{ et } -2s + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \text{ et } s = \frac{1}{2}.$$

Pour $s = \frac{1}{2}$, on obtient le point M de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ et pour $t = \frac{1}{3}$, on obtient le point N de coordonnées $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

On a démontré que la droite (MN) est perpendiculaire aux droites (AG) et (DB) si et seulement si M est le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ et N est le point de coordonnées $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

3) a) Les coordonnées du vecteur \overrightarrow{MN} sont $(t - s, t + s - 1, t)$. Donc,

$$\begin{aligned} MN^2 &= (t - s)^2 + (t + s - 1)^2 + t^2 = (t - s)^2 + (t + s - 1)(t + s - 1) + t^2 \\ &= t^2 - 2st + s^2 + t^2 + ts - t + st + s^2 - s - t - s + 1 + t^2 = 3t^2 + 2s^2 - 2t - 2s + 1 \\ &= 3\left(t^2 - \frac{2}{3}t\right) + 2(s^2 - s) + 1 = 3\left(\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right) + 2\left(\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) + 1 \\ &= 3\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} + 2\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 \\ &= 3\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

b) Pour tous réels s et t ,

$$3\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} \geq \frac{1}{6}$$

avec égalité si et seulement si $3\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$ ce qui équivaut à $\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 = \left(s - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$ ou encore $t = \frac{1}{3}$ et $s = \frac{1}{2}$.

Les points M et N pour lesquels la distance MN est minimale sont les points de coordonnées respectives $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ et $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Quand la distance MN est minimale, la droite (MN) est perpendiculaire aux droites (DB) et (AG) .