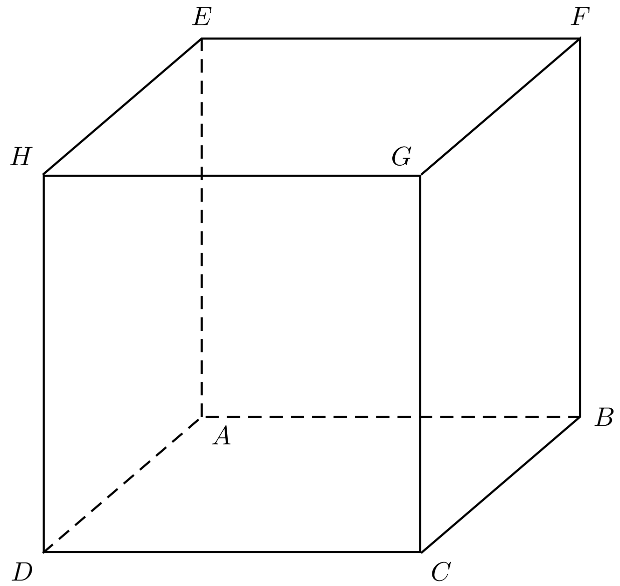
Antilles Guyane septembre 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Soit $ABCDEFGH$ le cube ci-dessous.



On se place dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1) a) Montrer que la droite (DB) admet pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = s \\ y = 1 - s \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{où } s \text{ décrit l'ensemble } \mathbb{R} \text{ des nombres réels.}$$

b) Montrer que les points de la droite (AG) sont les points de coordonnées (t, t, t) où t est un réel.

2) Soit M un point quelconque de la droite (DB) et N un point quelconque de la droite (AG).
Démontrer que la droite (MN) est perpendiculaire aux deux droites (AG) et (DB) si et seulement si M et N ont pour coordonnées respectives $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ et $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

3) Soit s et t deux réels quelconques. On note $M(s, 1 - s, 0)$ un point de la droite (DB) et $N(t, t, t)$ un point de la droite (AG).

a) Montrer que $MN^2 = 3\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}$.

b) En déduire la position des points M et N pour laquelle la distance MN est minimale.
Que peut-on dire de la droite (MN) dans ce cas ?

Antilles Guyane septembre 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

1) a) Le point B a pour coordonnées $(1,0,0)$ et le point D a pour coordonnées $(0,1,0)$. Donc, le vecteur $\overrightarrow{DB}$ a pour coordonnées $(1,-1,0)$.

La droite (DB) est la droite passant par $D(0,1,0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{DB}(1,-1,0)$. Une représentation paramétrique de la droite (DB) est donc

$$\left\{\begin{array}{l} x=s \\ y=1-s \\ z=0 \end{array}\right., \; s\in\mathbb{R}.$$

b) $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$. Donc, le point G a pour coordonnées $(1,1,1)$ puis le vecteur $\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées $(1,1,1)$.

La droite (AG) est la droite passant par $A(0,0,0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AG}(1,1,0)$. Une représentation paramétrique de la droite (AG) est donc

$$\left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=t \\ z=t \end{array}\right., \; t\in\mathbb{R}.$$

2) Soient $M(s,1-s,0)$, $s\in\mathbb{R}$, un point de la droite (DB) et $N(t,t,t)$, $t\in\mathbb{R}$, un point de la droite (AG). Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sont $(t-s,t+s-1,t)$. A partir des troisième et première coordonnées, si ce vecteur est nul, on a $t=0$ puis $s=0$. Mais alors $t+s-1=-1\neq 0$. Donc, les points M et N sont toujours distincts ou encore la droite (MN) est toujours définie.

Puisque M est un point de (DB) et N est un point de (AG), la droite (MN) est perpendiculaire aux droite (AG) et (DB) si et seulement si la droite (MN) est orthogonale aux droite (AG) et (DB). Or

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AG}=(t-s)\times 1+(t+s-1)\times 1+t\times 1=3t-1$$

et

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DB}=(t-s)\times 1+(t+s-1)\times(-1)+t\times 0=-2s+1.$$

Par suite,

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AG}=0 \text{ et } \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DB}=0 \Leftrightarrow 3t-1=0 \text{ et } -2s+1=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{3} \text{ et } s=\frac{1}{2}.$$

Pour $s=\dfrac{1}{2}$, on obtient le point M de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$ et pour $t=\dfrac{1}{3}$, on obtient le point N de coordonnées $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.

On a démontré que la droite (MN) est perpendiculaire aux droites (AG) et (DB) si et seulement si M est le point de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$ et N est le point de coordonnées $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.

3) a) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sont $(t-s,t+s-1,t)$. Donc,

$$\begin{aligned}
MN^2 &= (t-s)^2+(t+s-1)^2+t^2=(t-s)^2+(t+s-1)(t+s-1)+t^2 \\
&= t^2-2st+s^2+t^2+ts-t+st+s^2-s-t-s+1+t^2=3t^2+2s^2-2t-2s+1 \\
&= 3\left(t^2-\frac{2}{3}t\right)+2\left(s^2-s\right)+1=3\left(\left(t-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}\right)+2\left(\left(s-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right)+1 \\
&= 3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}+2\left(s-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+1 \\
&= 3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+2\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

b) Pour tous réels s et t,

$$3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+2\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6}\geqslant\frac{1}{6}$$

avec égalité si et seulement si $3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+2\left(s-\frac{1}{2}\right)^2=0$ ce qui équivaut à $\left(t-\frac{1}{3}\right)^2=\left(s-\frac{1}{2}\right)^2=0$ ou encore $t\frac{1}{3}$ et $s=\frac{1}{2}$.

Les points M et N pour lesquels la distance MN est minimale sont les points de coordonnées respectives $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$ et $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. Quand la distnce MN est minimale, la droite (MN) est perpendiculaire aux droites (DB) et (AG).

