Rochambeau 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (6 points) (commun à tous les candidats)

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$$u(x) = \ln(x) + x - 3.$$

1) Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

2) Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.

3) En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1) Déterminer la limite de la fonction f en 0.

2) a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.

b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Partie C

Soit $\mathscr{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

1) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0,+\infty[$, $f(x) - \ln(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{x}$.
En déduire que les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.

2) On admet que la fonction H définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par

$$H(x) = \frac{1}{2}(\ln(x))^2$$

est une primitive de la fonction h définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.
Calculer $I = \displaystyle\int_1^{e^2} \frac{2 - \ln x}{x}\, dx$.
Interpréter graphiquement ce résultat.

Rochambeau 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

Partie A

1) La fonction u est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et pour $x>0$,

$$u'(x)=\frac{1}{x}+1.$$

La fonction u' est strictement positive sur $]0,+\infty[$ et donc la fonction u est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

Autre solution. La fonction u est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions strictement croissantes sur $]0,+\infty[$.

2) $u(2)=\ln(2)-1=-0,3\ldots$ et $u(3)=\ln(3)=1,09\ldots$. Puisque $u(2)<0$ et $u(3)>0$ et que la fonction u est continue et strictement croissante sur $[2,3]$, un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que la fonction u s'annule une fois et une seule en un certain réel α de l'intervalle $[2,3]$.

D'autre part, puisque u est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, pour $x<2$, on a $u(x)<u(2)<0$ et pour $x>3$, on a $u(x)>u(3)>0$. Donc la fonction u ne s'annule pas sur $]0,2[$ et sur $]3,+\infty[$.

En résumé, la fonction u s'annule une fois et une seule sur $]0,+\infty[$, en un certain réel α élément de l'intervalle $[2,3]$.

3) Puisque u est strictement croissante sur $]0,+\infty[$, pour $x<\alpha$, on a $u(x)<u(\alpha)$ ou encore $u(x)<0$ et pour $x>\alpha$, $u(x)>u(\alpha)$ ou encore $u(x)>0$. Donc,

la fonction u est strictement négative sur $]0,\alpha[$, strictement positive sur $]\alpha,+\infty[$ et s'annule en α.

Partie B

1) $\lim\limits_{x\to 0,\ x>0}\frac{1}{x}=+\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to 0,\ x>0}\left(1-\frac{1}{x}\right)=-\infty$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to 0,\ x>0}\ln(x)=-\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to 0,\ x>0}(\ln(x)-2)=-\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x\to 0,\ x>0}\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)=+\infty$ et finalement

$$\boxed{\lim_{x\to 0,\ x>0}f(x)=+\infty.}$$

2) a) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x>0$,

$$\begin{aligned}f'(x)&=\left(-\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)(\ln(x)-2)+\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)+0=\frac{\ln(x)-2}{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\\&=\frac{\ln(x)-2+x-1}{x^2}=\frac{\ln(x)+x-3}{x^2}=\frac{u(x)}{x^2}.\end{aligned}$$

Pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{u(x)}{x^2}$.

b) Pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $x^2>0$. Donc, pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $u(x)$. Ce signe a été étudié à la question 3) de la partie A. On en déduit le tableau de variation de la fonction f.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

Partie C

1) Soit $x>0$.

$$\begin{aligned} f(x)-\ln(x) &= \left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)+2-\ln(x) = \ln(x)-2-\frac{\ln(x)}{x}+\frac{2}{x}+2-\ln(x) \\ &= \frac{2-\ln(x)}{x}. \end{aligned}$$

Les abscisses des points communs à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont les solutions de l'équation $f(x) = \ln(x)$.

Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} f(x) = \ln(x) &\Leftrightarrow f(x)-\ln(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2-\ln(x)}{x} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2-\ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 2 \\ &\Leftrightarrow x = e^2. \end{aligned}$$

Les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont un point commun et un seul à savoir le point de coordonnées $\left(e^2, \ln\left(e^2\right)\right)$ ou encore $\left(e^2, 2\right)$.

2)

$$\begin{aligned} \int_1^{e^2} \frac{2-\ln(x)}{x}\,dx &= \int_1^{e^2} \left(2\frac{1}{x}-\frac{\ln(x)}{x}\right)dx = \left[2\ln(x)-\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_1^{e^2} \\ &= \left(2\ln\left(e^2\right)-\frac{1}{2}\left(\ln\left(e^2\right)\right)^2\right)-\left(2\ln(1)-\frac{1}{2}(\ln(1))^2\right) \\ &= 2\times 2-\frac{1}{2}\times 2^2 = 2. \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^{e^2} \frac{2-\ln(x)}{x}\,dx = 2.}$$

Soit $x \leqslant e^2$. Alors, par croissance de la fonction ln sur $]0,+\infty[$, $\ln(x) \leqslant \ln(e^2)$ ou encore $\ln(x) \leqslant 2$ puis $2-\ln(x) \geqslant 0$ et enfin $f(x)-\ln(x) \geqslant 0$.

Ainsi, la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}'$ sur $\left[1, e^2\right]$. On en déduit que I est l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e^2$ d'une part, et le courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ d'autre part.