Rochambeau 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (4 points) (commun à tous les candidats)

Une entreprise fabrique des tablettes de chocolat de 100 grammes. Le service de contrôle qualité effectue plusieurs types de contrôle.

Partie A. Contrôle avant la mise sur le marché

Une tablette de chocolat doit peser 100 grammes avec une tolérance de deux grammes en plus ou en moins. Elle est donc mise sur le marché si sa masse est comprise entre 98 et 102 grammes.
La masse (exprimée en grammes) d'une tablette de chocolat peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 1$. Le réglage des machines de la chaîne de fabrication permet de modifier la valeur de σ.

1) Calculer la probabilité de l'événement M : « la tablette est mise sur le marché ».

2) On souhaite modifier le réglage des machines de telle sorte que la probabilité de cet événement atteigne 0,97.
Déterminer la valeur de σ pour que la probabilité de l'événement « la tablette est mise sur le marché »soit égale à $0,97$.

Partie B

Le service contrôle la qualité des fèves de cacao livrées par les producteurs. Un des critères de qualité est le taux d'humidité qui doit être de 7 %. On dit alors que la fève est conforme.

L'entreprise a trois fournisseurs différents :
le premier fournisseur procure la moitié du stock de fèves, le deuxième 30 % et le dernier apporte 20 % du stock.

Pour le premier, 98 % de sa production respecte le taux d'humidité ; pour le deuxième, qui est un peu moins cher, 90 % de sa production est conforme, et le troisième fournit 20 % de fèves non conformes.

On choisit au hasard une fève dans le stock reçu. On note F_i l'événement « la fève provient du fournisseur i », pour i prenant les valeurs 1, 2 ou 3, et C l'événement « la fève est conforme ».

1) Déterminer la probabilité que la fève provienne du fournisseur 1, sachant qu'elle est conforme.
Le résultat sera arrondi à 10^{-2}.

2) Le troisième fournisseur ayant la plus forte proportion de fèves non conformes. L'entreprise décide de ne conserver que les fournisseurs 1 et 2. De plus, elle souhaite que 92 % de fèves qu'elle achète soient conformes.
Quelle proportion p de fèves doit-elle acheter au fournisseur 1 pour atteindre cet objectif ?

Rochambeau 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Partie A

1) La probabilité demandée est $P(98 \leqslant X \leqslant 102)$. La calculatrice (ou le cours) fournit $P(98 \leqslant X \leqslant 102) = P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) = 0,95$ à 10^{-2} près.

2) Soit $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-100}{\sigma}$. On sait que Z suit la loi normale centré réduite (loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1). De plus,

$$98 \leqslant X \leqslant 102 \Leftrightarrow -2 \leqslant X - 100 \leqslant 2 \Leftrightarrow -\frac{2}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{2}{\sigma}.$$

Par symétrie,

$$\begin{aligned} P\left(-\frac{2}{\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{2}{\sigma}\right) &= P\left(Z \leqslant \frac{2}{\sigma}\right) - P\left(Z \leqslant -\frac{2}{\sigma}\right) = P\left(Z \leqslant \frac{2}{\sigma}\right) - P\left(Z \geqslant \frac{2}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z \leqslant \frac{2}{\sigma}\right) - \left(1 - P\left(Z \leqslant \frac{2}{\sigma}\right)\right) = 2P\left(Z \leqslant \frac{2}{\sigma}\right) - 1. \end{aligned}$$

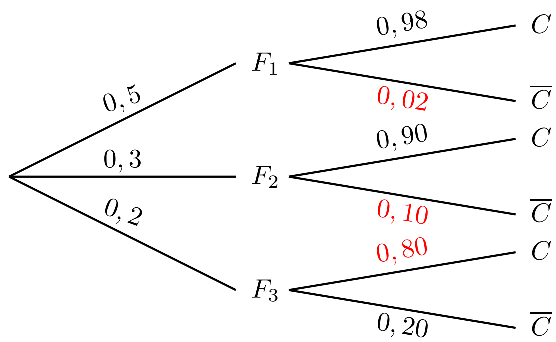
Puis,

$$P\left(98 \leqslant X \leqslant 102\right) = 0,97 \Leftrightarrow 2P\left(Z \leqslant \frac{2}{\sigma}\right) - 1 = 0,97 \Leftrightarrow P\left(Z \leqslant \frac{2}{\sigma}\right) = 0,985.$$

La calculatrice fournit $\dfrac{2}{\sigma} = 2,17009\ldots$ puis $\sigma = 0,92$ à 10^{-2} près.

Partie B

1) Représentons la situation par un arbre de probabilités.



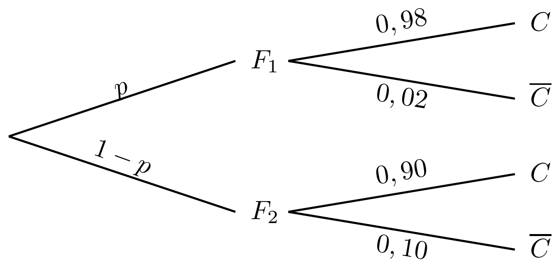
La probabilité demandée est $p_C\left(F_1\right)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} p(C) &= p\left(F_1\right) \times p_{F_1}(C) + p\left(F_2\right) \times p_{F_2}(C) + p\left(F_3\right) \times p_{F_3}(C) \\ &= 0,5 \times 0,98 + 0,3 \times 0,9 + 0,2 \times (1 - 0,2) = 0,92. \end{aligned}$$

Par suite,

$$p_C\left(F_1\right) = \frac{p\left(C \cap F_1\right)}{p(C)} = \frac{p\left(F_1\right) \times p_{F_1}(C)}{p(C)} = \frac{0,5 \times 0,98}{0,92} = 0,53 \text{ arrondi à } 10^{-2}.$$

2) Représentons de nouveau la situation par un arbre de probabilités.



D'après la formule des probabilités totales,

$$P(C) = P(F_1) \times P_{F_1}(C) + P(F_2) \times P_{F_2}(C) = 0,98p + 0,9(1-p) = 0,08p + 0,9,$$

puis

$$P(C) = 0,92 \Leftrightarrow 0,08p + 0,9 = 0,92 \Leftrightarrow p = \frac{0,02}{0,08} \Leftrightarrow p = \frac{1}{4}.$$

L'entreprise doit acheter le quart de ses fèves au fournisseur 1 et les trois quarts restant au fournisseur 2.

