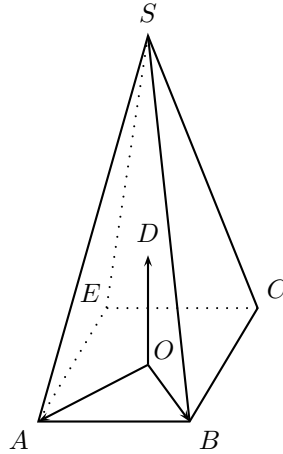


Rochambeau 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (5 points) (commun à tous les candidats)

Dans l'espace, on considère une pyramide $SABCE$ à base carrée $ABCE$ de centre O . Soit D le point de l'espace tel que $(O; \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OD})$ soit un repère orthonormé. Le point S a pour coordonnées $(0, 0, 3)$ dans ce repère.



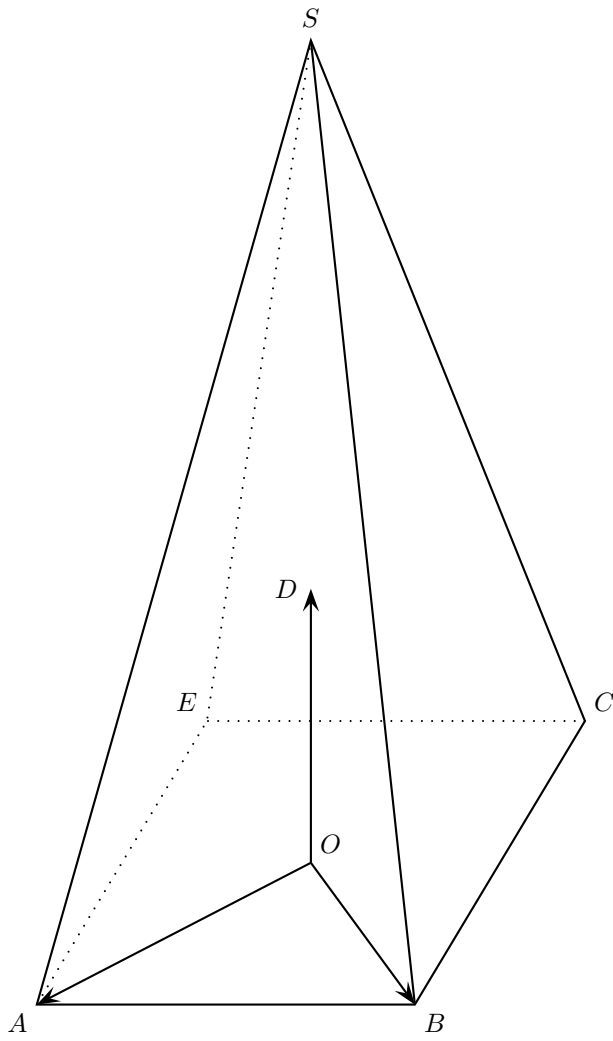
Partie A

- 1) Soit U le point de la droite (SB) de cote 1. Construire le point U sur la figure jointe en **annexe 1, (à rendre avec la copie)**.
- 2) Soit V le point d'intersection du plan (AEU) et de la droite (SC) . Montrer que les droites (UV) et (BC) sont parallèles. Construire le point V sur la figure jointe en **annexe 1, (à rendre avec la copie)**.
- 3) Soit K le point de coordonnées $(\frac{5}{6}, -\frac{1}{6}, 0)$.
Montrer que K est le pied de la hauteur issue de U dans le trapèze $AUVE$.

Partie B

Dans cette partie, on admet que l'aire du quadrilatère $AUVE$ est $\frac{5\sqrt{43}}{18}$.

- 1) On admet que le point U a pour coordonnées $(0, \frac{2}{3}, 1)$.
Vérifier que le plan (EAU) a pour équation $3x - 3y + 5z - 3 = 0$.
- 2) Donner une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EAU) passant par le point S .
- 3) Déterminer les coordonnées de H , point d'intersection de la droite (d) et du plan (EAU) .
- 4) Le plan (EAU) partage la pyramide $SABCE$ en deux solides.
Ces deux solides ont-ils le même volume ?

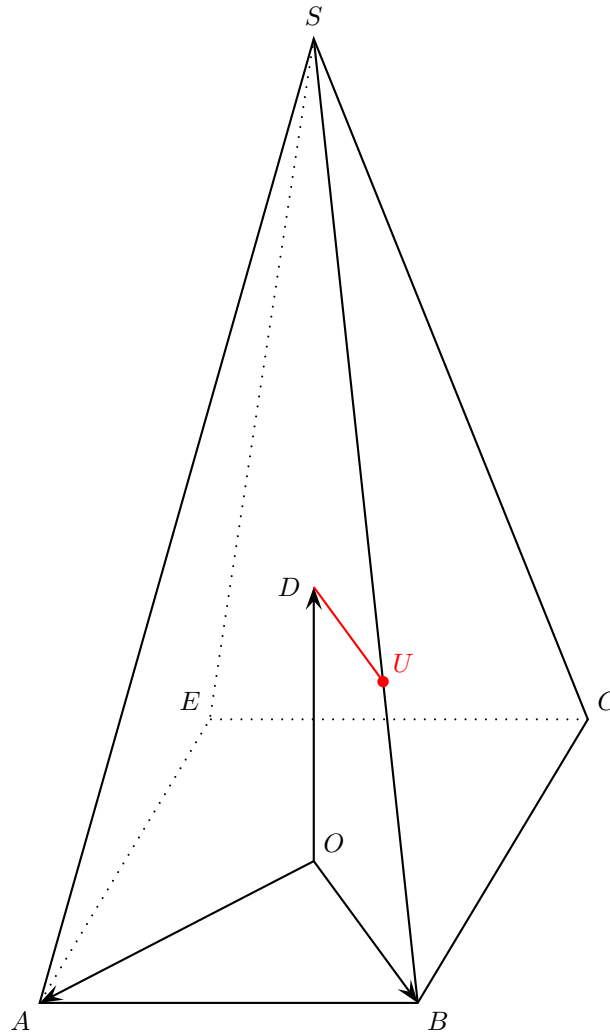


Rochambeau 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

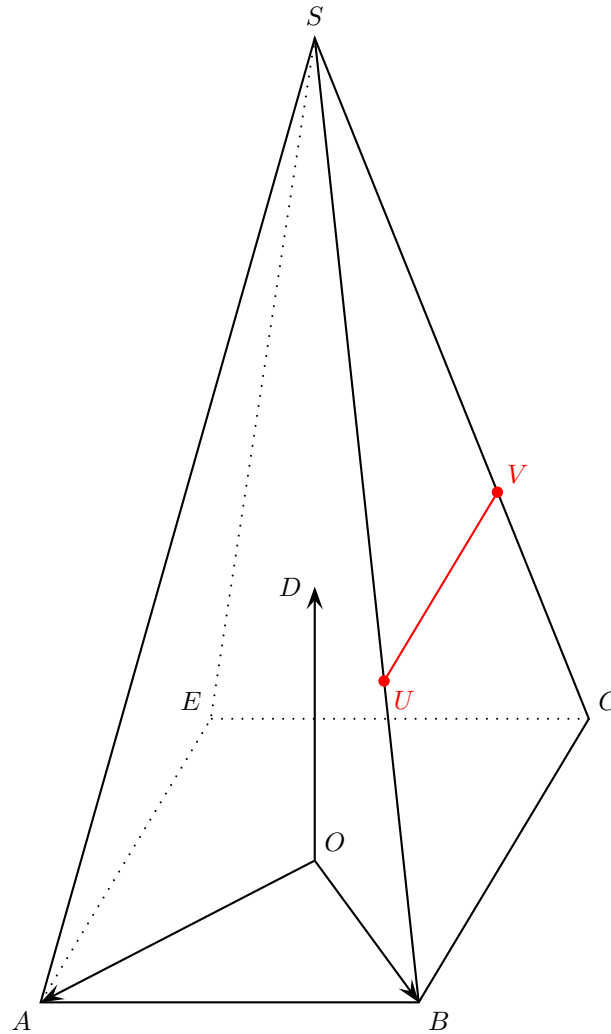
Partie A

1) Le point U est le point d'intersection de la parallèle à la droite (OB) passant par D et de la droite (SB) .



2) Les points A et E ne sont pas dans le plan (BCS) et le point U est dans le plan (BCS) (car sur la droite (BS)). Donc, le plan (AEU) et le plan (BCS) sont sécants en une droite Δ passant par U . Le point V est un autre point commun aux plans (AEU) et (BCS) (car sur la droite (SC)). Donc, le point V est un autre point de Δ . On en déduit que la droite Δ est la droite (UV) .

La droite (AE) est une droite du plan (AEU) et la droite (BC) est une droite du plan (BCS) . Puisque les droites (AE) et (BC) sont parallèles et que les plans (AEU) et (BCS) sont sécants en la droite (UV) , le théorème du toit permet d'affirmer que la droite (UV) est parallèle à la droite (BC) .



3) Le point A a pour coordonnées $(1, 0, 0)$. D'autre part, le point E est le symétrique du point B par rapport à O et le point B a pour coordonnées $(0, 1, 0)$. Donc le point E a pour coordonnées $(0, -1, 0)$.

Le vecteur \overrightarrow{AE} a pour coordonnées $(-1, -1, 0)$. D'autre part, le vecteur \overrightarrow{AK} a pour coordonnées $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, 0)$. On en déduit que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AE}$ et donc que le point K appartient à la droite (AE) .

Déterminons les coordonnées du point U . Le point U est le point de la droite (SB) de côte 1. La droite (SB) est la droite passant par $S(0, 0, 3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{BS}(0, -1, 3)$. Un système d'équations paramétriques de la droite

$$(SB) \text{ est } \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = 3 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \text{ La côte du point de coordonnées } (0, -t, 3 + 3t) \text{ est égale à } 1 \text{ si et seulement si } 3t + 3 = 1$$

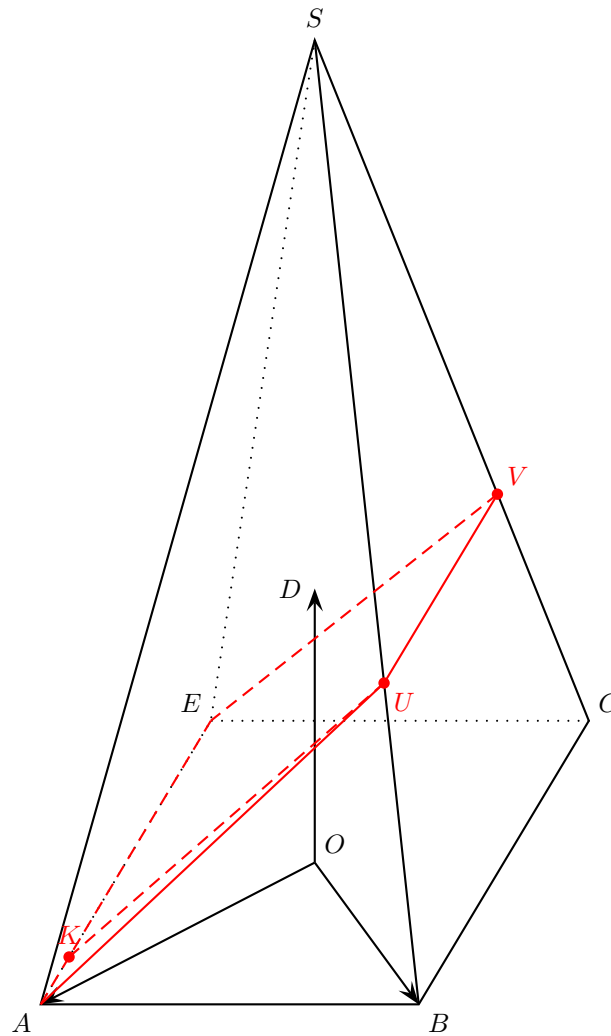
ou encore $t = -\frac{2}{3}$. Pour $t = -\frac{2}{3}$, on obtient les coordonnées du point U :

$$U\left(0, \frac{2}{3}, 1\right).$$

Vérifions enfin que le vecteur \overrightarrow{UK} est orthogonal au vecteur \overrightarrow{AE} . Le vecteur \overrightarrow{AE} a pour coordonnées $(-1, -1, 0)$ et le vecteur \overrightarrow{UK} a pour coordonnées $(\frac{5}{6} - 0, -\frac{1}{6} - \frac{2}{3}, -1)$ ou encore $(\frac{5}{6}, -\frac{5}{6}, -1)$. Par suite,

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{UK} = (-1) \times \frac{5}{6} + (-1) \times \left(-\frac{5}{6}\right) + 0 \times (-1) = -\frac{5}{6} + \frac{5}{6} = 0.$$

On a montré que le point K est le pied de la hauteur issue de U dans le trapèze $AUVE$.



Partie B

1) Les points A , E et U ne sont pas alignés. Ils définissent donc un unique plan.

• $3x_E - 3y_E + 5z_E - 3 = 3 \times 0 - 3 \times (-1) + 5 \times 0 - 3 = 3 - 3 = 0$. Donc le point E appartient au plan d'équation $3x - 3y + 5z - 3 = 0$.

• $3x_A - 3y_A + 5z_A - 3 = 3 \times 1 - 3 \times 0 + 5 \times 0 - 3 = 3 - 3 = 0$. Donc le point A appartient au plan d'équation $3x - 3y + 5z - 3 = 0$.

• $3x_U - 3y_U + 5z_U - 3 = 3 \times 0 - 3 \times \frac{2}{3} + 5 \times 1 - 3 = -2 + 5 - 3 = 0$. Donc le point U appartient au plan d'équation $3x - 3y + 5z - 3 = 0$.

Ceci montre que le plan d'équation $3x - 3y + 5z - 3 = 0$ est le plan (EAU) ou encore que le plan (EAU) a pour équation $3x - 3y + 5z - 3 = 0$.

2) Un vecteur normal au plan (EAU) est le vecteur \vec{n} de coordonnées $(3, -3, 5)$. La droite (d) est la droite passant par $S(0, 0, 3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(3, -3, 5)$. Un système d'équations paramétriques de (d) est

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = -3t \\ z = 3 + 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

3) Soit $M(3t, -3t, 3 + 5t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de (d) .

$$\begin{aligned} M \in (EAU) &\Leftrightarrow 3(3t) - 3(-3t) + 5(3 + 5t) - 3 = 0 \Leftrightarrow 43t + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow t = -\frac{12}{43}. \end{aligned}$$

Quand $t = -\frac{12}{43}$, on obtient les coordonnées du point $H : \left(-\frac{36}{43}, \frac{36}{43}, \frac{69}{43}\right)$.

4) H est le projeté orthogonal de S sur le plan (EAU) .

$$\begin{aligned} SH &= \sqrt{\left(0 + \frac{36}{43}\right)^2 + \left(0 - \frac{36}{43}\right)^2 + \left(3 - \frac{69}{43}\right)^2} = \frac{1}{43} \sqrt{36^2 + 36^2 + 60^2} = \frac{1}{43} \sqrt{12^2 (3^2 + 3^2 + 5^2)} \\ &= \frac{12\sqrt{43}}{43}. \end{aligned}$$

Le volume de la pyramide $SAUEV$ est

$$\mathcal{V}_1 = \frac{1}{3} \times \frac{5\sqrt{43}}{18} \times \frac{12\sqrt{43}}{43} = \frac{5 \times 2}{3 \times 3} = \frac{10}{9}.$$

Déterminons le volume de la pyramide $SABCE$. Une diagonale du carré $ABCE$ a pour longueur 2 et donc le côté du carré $ABCE$ a pour longueur $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. L'aire du carré $ABCE$ est donc $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ puis le volume de la pyramide $SABCE$ est

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times 2 \times 3 = 2.$$

Le volume du solide $AUV EBC$ est donc $2 - \frac{10}{9} = \frac{8}{9}$. Le plan (AEU) ne partage donc pas la pyramide $SABCE$ en deux solides de même volume.