

# Pondichéry 2015. Enseignement de spécialité

## EXERCICE 4 (5 points) (candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité)

Les nombres de la forme  $2^n - 1$  où  $n$  est un entier naturel non nul sont appelés **nombres de Mersenne**.

- 1) On désigne par  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois entiers naturels non nuls tels que  $\text{PGCD}(b ; c) = 1$ .  
Prouver, à l'aide du théorème de Gauss, que :

si  $b$  divise  $a$  et  $c$  divise  $a$  alors le produit  $bc$  divise  $a$ .

- 2) On considère le nombre de Mersenne  $2^{33} - 1$ .  
Un élève utilise sa calculatrice et obtient les résultats ci-dessous.

$(2^{33} - 1) \div 3$	2863311530
$(2^{33} - 1) \div 4$	2147483648
$(2^{33} - 1) \div 12$	715827882,6

Il affirme que 3 divise  $(2^{33} - 1)$  et 4 divise  $(2^{33} - 1)$  et 12 ne divise pas  $(2^{33} - 1)$ .

- a) En quoi cette affirmation contredit-elle le résultat démontré à la question 1) ?  
b) Justifier que, en réalité, 4 ne divise pas  $(2^{33} - 1)$ .  
c) En remarquant que  $2 \equiv -1 \pmod{3}$ , montrer que, en réalité, 3 ne divise pas  $2^{33} - 1$ .  
d) Calculer la somme  $S = 1 + 2^3 + (2^3)^2 + (2^3)^3 + \dots + (2^3)^{10}$ .  
e) En déduire que 7 divise  $2^{33} - 1$ .
- 3) On considère le nombre de Mersenne  $2^7 - 1$ . Est-il premier ? Justifier.
- 4) On donne l'algorithme suivant où  $\text{MOD}(N, k)$  représente le reste de la division euclidienne de  $N$  par  $k$ .

<b>Variables</b>	$n$ entier naturel supérieur ou égal à 3 $k$ entier naturel supérieur ou égal à 2
<b>Initialisation</b>	Demander à l'utilisateur la valeur de $n$ Affecter à $k$ la valeur 2
<b>Traitement</b>	Tant que $\text{MOD}(2^n - 1, k) \neq 0$ et $k \leq \sqrt{2^n - 1}$ Affecter à $k$ la valeur $k + 1$ Fin Tant que
<b>Sortie</b>	<b>Afficher</b> $k$ Si $k > \sqrt{2^n - 1}$ <b>Afficher</b> « CAS 1 » Sinon <b>Afficher</b> « CAS 2 » Fin de Si

- a) Qu'affiche cet algorithme si on saisit  $n = 33$  ? Et si on saisit  $n = 7$  ?  
b) Que représente le CAS 2 pour le nombre de Mersenne étudié ?  
    Que représente alors le nombre  $k$  affiché pour le nombre de Mersenne étudié ?  
c) Que représente le CAS 1 pour le nombre de Mersenne étudié ?