

Pondichéry 2015. Enseignement de spécialité

EXERCICE 4 : corrigé

1) **b** divise **a**. Donc il existe un entier k tel que $a = kb$. c divise a ou encore c divise kb . De plus, c est premier à b . D'après le théorème de GAUSS, c divise k . Par suite, il existe un entier k' tel que $k = k'c$. Mais alors $a = k'bc$. Puisque k' est un entier, ceci montre que bc divise a .

2) **a)** Puisque les entiers 3 et 4 sont premiers entre eux, si 3 divise $2^{33} - 1$ et 4 divise $2^{33} - 1$, la question 1) montre que $12 = 3 \times 4$ doit diviser $2^{33} - 1$ ce qui ne semble pas être le cas.

b) Un multiple de 4 est en particulier un nombre pair. Mais 2^{33} est un nombre pair et donc $2^{33} - 1$ est un nombre impair. Donc $2^{33} - 1$ n'est pas un multiple de 4 ou encore 4 ne divise pas $2^{33} - 1$.

c) Puisque $2 \equiv -1 \pmod{3}$, on en déduit que $2^{33} - 1 \equiv (-1)^{33} - 1 \pmod{3}$ ou encore $2^{33} - 1 \equiv -2 \pmod{3}$. En particulier, $2^{33} - 1$ n'est pas congru à 0 modulo 3 ou encore $2^{33} - 1$ n'est pas un multiple de 3 ou enfin 3 ne divise pas $2^{33} - 1$.

d) Puisque $2^3 \neq 1$,

$$S = 1 + 2^3 + (2^3)^2 + (2^3)^3 + \dots + (2^3)^{10} = \frac{(2^3)^{11} - 1}{2^3 - 1} = \frac{2^{33} - 1}{7}.$$

e) Ainsi, $\frac{2^{33} - 1}{7}$ est un entier et donc 7 divise $2^{33} - 1$.

3) On sait qu'un entier naturel supérieur ou égal à 2 est premier si et seulement si cet entier n'est divisible par aucun des nombres premiers inférieurs ou égaux à sa racine carrée.

$\sqrt{2^7 - 1} = \sqrt{127} = 11, \dots$ Les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{2^7 - 1}$ sont 2, 3, 5, 7 et 11 et $2^7 - 1 = 127$.

- 127 est impair et donc 127 n'est pas divisible par 2.
- La somme des chiffres de 127, à savoir 10, n'est pas divisible par 3 et donc 127 n'est pas divisible par 3.
- Le chiffre des unités de 127 n'est ni 0, ni 5, et donc 127 n'est pas divisible par 5.
- $\frac{127}{7} = 18,1\dots$ n'est pas un entier et donc 127 n'est pas divisible par 7.
- $\frac{127}{11} = 11,5\dots$ n'est pas un entier et donc 127 n'est pas divisible par 11.

On a montré que $2^7 - 1$ est un nombre premier.

4) **a)** Le nombre $2^{33} - 1$ n'est divisible ni par 2 (car $2^{33} - 1$ est impair, ni par 3 (d'après 2)c)), ni par 5 (car, modulo 5, $2^{33} - 1 = 2 \times 4^{16} - 1 \equiv 2 \times (-1)^{16} - 1 = 1$) et donc n'est divisible par aucun des entiers 2, 3, 4, 5, 6. D'autre part, $2^{33} - 1$ est divisible par 7 (d'après 2)e)). Enfin, $7 < \sqrt{2^{33} - 1}$. Ainsi, si $n = 33$, l'algorithme affiche 7 puis CAS 2.

D'après la question 3), le nombre $2^7 - 1$ est premier. Donc, $2^7 - 1$ n'est divisible par aucun des entiers k inférieurs ou égaux à $\sqrt{2^7 - 1} = 11, \dots$. Ainsi, si $n = 7$, l'algorithme affiche 12 qui est le premier entier strictement supérieur à $\sqrt{2^7 - 1}$ puis CAS 2.

b) Le CAS 2 est le cas où le nombre de MERSENNE étudié n'est pas premier. Le nombre k affiché est le plus petit diviseur supérieur ou égal à 2 de ce nombre de MERSENNE.

c) Le CAS 1 est le cas où le nombre de MERSENNE étudié est premier.