# Pondichéry 2015. Enseignement de spécialité

**EXERCICE 4 (5 points) (candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité)**

Les nombres de la forme $2^n - 1$ où $n$ est un entier naturel non nul sont appelés **nombres de Mersenne**.

**1)** On désigne par $a$, $b$ et $c$ trois entiers naturels non nuls tels que $\text{PGCD}(b\ ;\ c) = 1$.
Prouver, à l'aide du théorème de Gauss, que :

si $b$ divise $a$ et $c$ divise $a$ alors le produit $bc$ divise $a$.

**2)** On considère le nombre de Mersenne $2^{33} - 1$.
Un élève utilise sa calculatrice et obtient les résultats ci-dessous.

| | |
|---|---|
| $\left(2^{33}-1\right) \div 3$ | 2863311530 |
| $\left(2^{33}-1\right) \div 4$ | 2147483648 |
| $\left(2^{33}-1\right) \div 12$ | 715827882,6 |

Il affirme que 3 divise $\left(2^{33}-1\right)$ et 4 divise $\left(2^{33}-1\right)$ et 12 ne divise pas $\left(2^{33}-1\right)$.

**a)** En quoi cette affirmation contredit-elle le résultat démontré à la question **1)** ?

**b)** Justifier que, en réalité, 4 ne divise pas $\left(2^{33}-1\right)$.

**c)** En remarquant que $2 \equiv -1\ [3]$, montrer que, en réalité, 3 ne divise pas $2^{33} - 1$.

**d)** Calculer la somme $S = 1 + 2^3 + \left(2^3\right)^2 + \left(2^3\right)^3 + \cdots + \left(2^3\right)^{10}$.

**e)** En déduire que 7 divise $2^{33} - 1$.

**3)** On considère le nombre de Mersenne $2^7 - 1$. Est-il premier ? Justifier.

**4)** On donne l'algorithme suivant où $\text{MOD}(N,\ k)$ représente le reste de la division euclidienne de $N$ par $k$.

| | |
|---|---|
| **Variables** | $n$ entier naturel supérieur ou égal à 3<br>$k$ entier naturel supérieur ou égal à 2 |
| **Initialisation** | Demander à l'utilisateur la valeur de $n$<br>Affecter à $k$ la valeur 2 |
| **Traitement** | Tant que $\text{MOD}(2^n - 1,\ k) \neq 0$ et $k \leqslant \sqrt{2^n - 1}$<br>    Affecter à $k$ la valeur $k + 1$<br>Fin Tant que |
| **Sortie** | **Afficher** $k$<br>Si $k > \sqrt{2^n - 1}$<br>    **Afficher** « CAS 1 »<br>    Sinon<br>    **Afficher** « CAS 2 »<br>Fin de Si |

**a)** Qu'affiche cet algorithme si on saisit $n = 33$ ? Et si on saisit $n = 7$ ?

**b)** Que représente le CAS 2 pour le nombre de Mersenne étudié ?
Que représente alors le nombre $k$ affiché pour le nombre de Mersenne étudié ?

**c)** Que représente le CAS 1 pour le nombre de Mersenne étudié ?

 

# Pondichéry 2015. Enseignement de spécialité

**EXERCICE 4 : corrigé**

**1)** $b$ divise $a$. Donc il existe un entier $k$ tel que $a = kb$. $c$ divise $a$ ou encore $c$ divise $kb$. De plus, $c$ est premier à $b$. D'après le théorème de Gauss, $c$ divise $k$. Par suite, il existe un entier $k'$ tel que $k = k'c$. Mais alors $a = k'bc$. Puisque $k'$ est un entier, ceci montre que $bc$ divise $a$.

**2) a)** Puisque les entiers 3 et 4 sont premiers entre eux, si 3 divise $2^{33} - 1$ et 4 divise $2^{33} - 1$, la question 1) montre que $12 = 3 \times 4$ doit diviser $2^{33} - 1$ ce qui ne semble pas être le cas.

**b)** Un multiple de 4 est en particulier un nombre pair. Mais $2^{33}$ est un nombre pair et donc $2^{33} - 1$ est un nombre impair. Donc $2^{33} - 1$ n'est pas un multiple de 4 ou encore 4 ne divise pas $2^{33} - 1$.

**c)** Puisque $2 \equiv -1$ [3], on en déduit que $2^{33} - 1 \equiv (-1)^{33} - 1$ [3] ou encore $2^{33} - 1 \equiv -2$ [3]. En particulier, $2^{33} - 1$ n'est pas congru à $0$ modulo 3 ou encore $2^{33} - 1$ n'est pas un multiple de 3 ou enfin 3 ne divise pas $2^{33} - 1$.

**d)** Puisque $2^3 \neq 1$,

$$S = 1 + 2^3 + \left(2^3\right)^2 + \left(2^3\right)^3 + \ldots + \left(2^3\right)^{10} = \frac{\left(2^3\right)^{11} - 1}{2^3 - 1} = \frac{2^{33} - 1}{7}.$$

**e)** Ainsi, $\dfrac{2^{33} - 1}{7}$ est un entier et donc 7 divise $2^{33} - 1$.

**3)** On sait qu'un entier naturel supérieur ou égal à 2 est premier si et seulement si cet entier n'est divisible par aucun des nombres premiers inférieurs ou égaux à sa racine carrée.
$\sqrt{2^7 - 1} = \sqrt{127} = 11, \ldots$ Les nombres premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{2^7 - 1}$ sont 2, 3, 5, 7 et 11 et $2^7 - 1 = 127$.

- $127$ est impair et donc $127$ n'est pas divisible par 2.
- La somme des chiffres de $127$, à savoir $10$, n'est pas divisible par 3 et donc $127$ n'est pas divisible par 3.
- Le chiffre des unités de $127$ n'est ni $0$, ni $5$, et donc $127$ n'est pas divisble par 5.
- $\dfrac{127}{7} = 18,1\ldots$ n'est pas un entier et donc $127$ n'est pas divisble par $7$.
- $\dfrac{127}{11} = 11,5\ldots$ n'est pas un entier et donc $127$ n'est pas divisble par $11$.

On a montré que $2^7 - 1$ est un nombre premier.

**4) a)** Le nombre $2^{33} - 1$ n'est divisible ni par 2 (car $2^{33} - 1$ est impair, ni par 3 (d'après 2)c)), ni par 5 (car, modulo 5, $2^{33} - 1 = 2 \times 4^{16} - 1 \equiv 2 \times (-1)^{16} - 1 = 1$) et donc n'est divisible par aucun des entiers 2, 3, 4, 5, 6. D'autre part, $2^{33} - 1$ est divisible par 7 (d'après 2)e)). Enfin, $7 < \sqrt{2^{33} - 1}$. Ainsi, si $n = 33$, l'algorithme affiche 7 puis CAS 2.

D'après la question 3), le nombre $2^7 - 1$ est premier. Donc, $2^7 - 1$ n'est divisible par aucun des entiers $k$ inférieurs ou égaux à $\sqrt{2^7 - 1} = 11, \ldots$. Ainsi, si $n = 7$, l'algorithme affiche $12$ qui est le premier entier strictement supérieur à $\sqrt{2^7 - 1}$ puis CAS 2.

**b)** Le CAS 2 est le cas où le nombre de Mersenne étudié n'est pas premier. Le nombre $k$ affiché est le plus petit diviseur supérieur ou égal à 2 de ce nombre de Mersenne.

**c)** Le CAS 1 est le cas où le nombre de Mersenne étudié est premier.

 