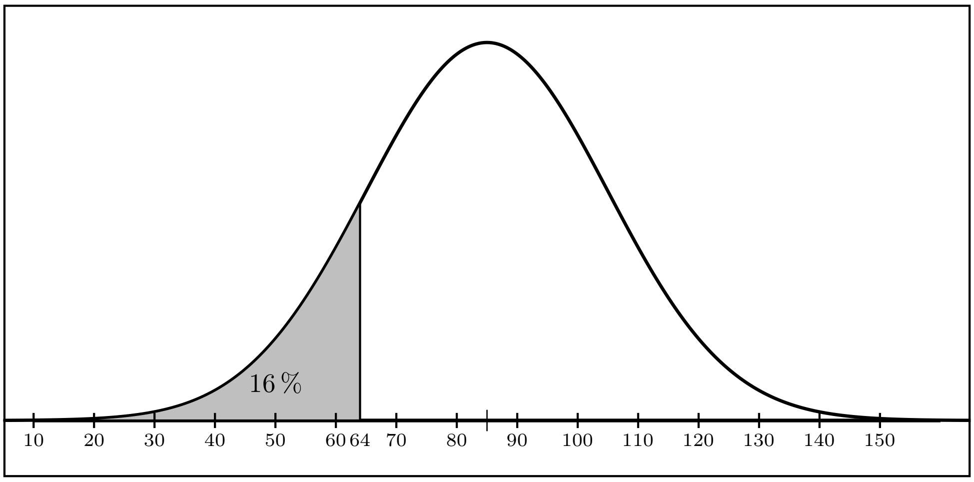
# Pondichéry 2015. Enseignement spécifique

**EXERCICE 3 (6 points) (commun à tous les candidats)**

**Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.**

**Partie A. Étude de la durée de vie d'un appareil électroménager**

Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de vie, en mois, d'un type de lave-vaisselle par une variable aléatoire $X$ suivant une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu,\ \sigma^2\right)$ de moyenne $\mu = 84$ et d'écart-type $\sigma$. De plus, on a $P(X \leqslant 64) = 0,16$.
La représentation graphique de la fonction densité de probabilité de $X$ est donnée ci-dessous.




**1) a)** En exploitant le graphique, déterminer $P(64 \leqslant X \leqslant 104)$.

**b)** Quelle valeur approchée entière de $\sigma$ peut-on proposer ?

**2)** On note $Z$ la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{X - 84}{\sigma}$.

**a)** Quelle est la loi de probabilité suivie par $Z$ ?

**b)** Justifier que $P(X \leqslant 64) = P\left(Z \leqslant \dfrac{-20}{\sigma}\right)$.

**c)** En déduire la valeur de $\sigma$, arrondie à $10^{-3}$.

**3)** Dans cette question, on considère que $\sigma = 20,1$.
Les probabilités demandées seront arrondies à $10^{-3}$.

**a)** Calculer la probabilité que la durée de vie du lave-vaisselle soit comprise entre 2 et 5 ans.

**b)** Calculer la probabilité que le lave-vaisselle ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

**Partie B. Etude de l'extension de garantie d'El'Ectro**

Le lave-vaisselle est garanti gratuitement pendant les deux premières années.
L'entreprise El'Ectro propose à ses clients une extension de garantie de 3 ans supplémentaires.
Des études statistiques menées **sur les clients qui prennent l'extension de garantie** montrent que 11,5 % d'entre eux font jouer l'extension de garantie.

**1)** On choisit au hasard 12 clients parmi ceux ayant pris l'extension de garantie (on peut assimiler ce choix à un tirage au hasard avec remise vu le grand nombre de clients).

**a)** Quelle est la probabilité qu'exactement 3 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Détailler la démarche en précisant la loi de probabilité utilisée. Arrondir à $10^{-3}$.

**b)** Quelle est la probabilité qu'au moins 6 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Arrondir à $10^{-3}$.

**2)** L'offre d'extension de garantie est la suivante : pour 65 euros supplémentaires, El'Ectro remboursera au client la valeur initiale du lave-vaisselle, soit 399 euros, **si une panne irréparable survient entre le début de la troisième année et la fin de la cinquième année**. Le client ne peut pas faire jouer cette extension de garantie si la panne est réparable.
On choisit au hasard un client parmi les clients ayant souscrit l'extension de garantie, et on note $Y$ la variable aléatoire qui représente le gain algébrique en euros réalisé sur ce client par l'entreprise El'Ectro, grâce à l'extension de garantie.

**a)** Justifier que $\mathsf{Y}$ prend les valeurs 65 et $-334$ puis donner la loi de probabilité de $\mathsf{Y}$.

**b)** Cette offre d'extension de garantie est-elle financièrement avantageuse pour l'entreprise ?
Justifier.

# Pondichéry 2015. Enseignement spécifique

**EXERCICE 3 : corrigé**

**Partie A**

**1) a)** Puisque $\dfrac{64+104}{2} = 84 = \mu$, les deux nombres 64 et 104 sont symétriques par rapport à $\mu$. On en déduit que

$$P(64 \leqslant X \leqslant 104) = 1 - P(X \leqslant 64) - P(X \geqslant 104) = 1 - 2P(X \leqslant 64) = 1 - 2 \times 0,16 = 0,68.$$

$$\boxed{P(64 \leqslant X \leqslant 104) = 0,68.}$$

**b)** D'après le cours, $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0,68$. On peut donc proposer $\sigma = \mu - 64 = 20$.

$$\boxed{\sigma = 20 \text{ à } 1 \text{ près.}}$$

**2) a)** On sait que la variable aléatoire $Z$ suit la loi normale centrée réduite c'est-à-dire la loi normale de moyenne $0$ et d'écart-type 1.

**b)** $X \leqslant 64 \Leftrightarrow X - 84 \leqslant -20 \Leftrightarrow \dfrac{X-84}{\sigma} \leqslant -\dfrac{20}{\sigma} \Leftrightarrow Z \leqslant -\dfrac{20}{\sigma}$. Les événements $X \leqslant 64$ et $Z \leqslant -\dfrac{20}{\sigma}$ se produisent simultanément. Donc

$$P(X \leqslant 64) = P\left(Z \leqslant -\frac{20}{\sigma}\right).$$

**c)** La calculatrice fournit

$$P(X \leqslant 64) = 0,16 \Leftrightarrow P\left(Z \leqslant -\frac{20}{\sigma}\right) = 0,16 \Leftrightarrow -\frac{20}{\sigma} = -0,9944\ldots \Leftrightarrow \sigma = \frac{20}{0,9944\ldots}$$
$$\Leftrightarrow \sigma = 20,1114\ldots$$

$$\boxed{\sigma = 20,111 \text{ arrondi à } 10^{-3}.}$$

**3) a)** La probabilité demandée est $P(24 \leqslant X \leqslant 60)$. La calculatrice fournit

$$\boxed{P(24 \leqslant X \leqslant 60) = 0,115 \text{ arrondi à } 10^{-3}.}$$

**b)** La probabilité demandée est $P(X \geqslant 120)$ ou encore $1 - P(X \leqslant 120)$. La calculatrice fournit

$$\boxed{P(X \leqslant 120) = 0,037 \text{ arrondi à } 10^{-3}.}$$

**Partie B**

**1) a)** Notons $Y$ la variable aléatoire égale au nombre de clients faisant jouer l'extension de garantie. La variable $Y$ suit une loi binomiale. En effet,

- 12 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux éventualités à savoir « le client fait jouer l'extension de garantie » avec une probabilité $p = 0,115$ et « le client ne fait pas jouer l'extension de garantie » avec une probabilité $1 - p = 0,885$.

La variable $Y$ suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = 0,115$.

La probabilité demandée est $P(Y = 3)$. La calculatrice fournit

$$P(Y = 3) = \binom{12}{3} \times 0,115^3 \times 0,885^9 = 0,111 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

**b)** La probabilité demandée est $P(Y \geqslant 6)$. La calculatrice fournit

$$P(Y \geqslant 6) = 1 - P(Y \leqslant 5) = 0,001 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

**2)** Dans cette question, $Y$ désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros réalisé sur ce client par l'entreprise.

**a)** La variable $Y$ prend deux valeurs : 65 euros si la panne est réparable et $65 - 399 = -334$ euros si la panne est irréparable. La loi de probabilité de $Y$ est

$$P(Y = -334) = 0,115 \quad \text{et} \quad P(Y = 65) = 0,885.$$

**b)** L'espérance de la variable $Y$ est

$$E(Y) = 0,115 \times (-334) + 0,885 \times 65 = 19,115.$$

L'entreprise gagne donc en moyenne $19,115$ euros par client ayant pris l'extension de garantie. Puisque cette espérance est strictement positive, cette offre d'extension de garantie est financièrement avantageuse pour l'entreprise.