Polynésie 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 5 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Soit (v_n) la suite définie par

$$v_1 = \ln(2) \quad \text{et, pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } v_{n+1} = \ln\left(2 - e^{-v_n}\right).$$

On admet que cette suite est définie pour tout entier naturel n non nul.
On définit ensuite la suite (S_n) pour tout entier naturel n non nul par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$

Le but de cet exercice est de déterminer la limite de (S_n).

Partie A. Conjecture à l'aide d'un algorithme

1) Recopier et compléter l'algorithme suivant qui calcule et affiche la valeur de S_n pour une valeur de n choisie par l'utilisateur :

Variables :	n, k entiers S, v réels
Initialisation :	Saisir la valeur de n v prend la valeur ... S prend la valeur ...
Traitement : Sortie :	Pour k variant de ... à ... faire ... prend la valeur ... ... prend la valeur ... Fin Pour Afficher S

2) À l'aide de cet algorithme, on obtient quelques valeurs de S_n. Les valeurs arrondies au dixième sont données dans le tableau ci-dessous :

n	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
S_n	$2,4$	$4,6$	$6,9$	$9,2$	$11,5$	$13,8$

En expliquant votre démarche, émettre une conjecture quant au comportement de la suite (S_n).

Partie B. Etude d'une suite auxiliaire

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la suite (u_n) par $u_n = e^{v_n}$.

1) Vérifier que $u_1 = 2$ et que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$.

2) Calculer u_2, u_3 et u_4. Les résultats seront donnés sous forme fractionnaire.

3) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Partie C. Etude de (S_n)

1) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer v_n en fonction de u_n, puis v_n en fonction de n.

2) Vérifier que $S_3 = \ln(4)$.

3) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer S_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (S_n).

Polynésie 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 5 : corrigé

Partie A

1) Algorithme complété.

Variables :	n, k entiers S, v réels
Initialisation :	Saisir la valeur de n v prend la valeur $\ln(2)$ S prend la valeur 0

Traitement :
 	
Sortie :
	Pour k variant de 1 à n faire
	    S prend la valeur $S+v$
	    v prend la valeur $\ln\left(2-e^{-v}\right)$
	Fin Pour
	Afficher S

2) Il semble que la suite (S_n) soit croissante et tende lentement vers $+\infty$.

Partie B

1) $u_1 = e^{v_1} = \ln 2 = 2$ puis, pour tout entier naturel non nul n,

$$u_{n+1} = e^{v_{n+1}} = e^{\ln\left(2-e^{-v_n}\right)} = 2 - e^{-v_n} = 2 - \frac{1}{e^{v_n}} = 2 - \frac{1}{u_n}.$$

$$\boxed{u_1 = 2 \text{ et pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}.}$$

2) $u_2 = 2 - \dfrac{1}{u_1} = 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$ puis $u_3 = 2 - \dfrac{1}{u_2} = 2 - \dfrac{1}{3/2} = 2 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$ puis $u_4 = 2 - \dfrac{1}{u_3} = 2 - \dfrac{1}{4/3} = 2 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{5}{4}$.

$$\boxed{u_2 = \frac{3}{2},\ u_3 = \frac{4}{3} \text{ et } u_4 = \frac{5}{4}.}$$

3) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

- $\dfrac{1+1}{1} = 2 = u_1$. Donc l'égalité est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $u_n = \dfrac{n+1}{n}$. Alors,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= 2 - \frac{1}{u_n} \\
&= 2 - \frac{1}{(n+1)/n} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{2(n+1)-n}{n+1} \\
&= \frac{n+2}{n+1} = \frac{(n+1)+1}{n+1}.
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $u_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Partie C

1) Soit n un entier naturel non nul.

$$u_n = e^{v_n} \Rightarrow v_n = \ln(u_n) \Rightarrow v_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ v_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).}$$

2) $S_3 = v_1 + v_2 + v_3 = \ln(2) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) = \ln\left(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3}\right) = \ln(4)$.

3) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $S_n = \ln(n+1)$.

- $S_1 = v_1 = \ln(2) = \ln(1+1)$. L'égalité est donc vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $S_n = \ln(n+1)$. Alors,

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= (v_1 + \ldots + v_n) + v_{n+1} = S_n + v_{n+1} \\
&= \ln(n+1) + \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n+1}\right) = \ln(n+2).
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $S_n = \ln(n+1)$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ S_n = \ln(n+1).}$$

En particulier,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty.}$$

