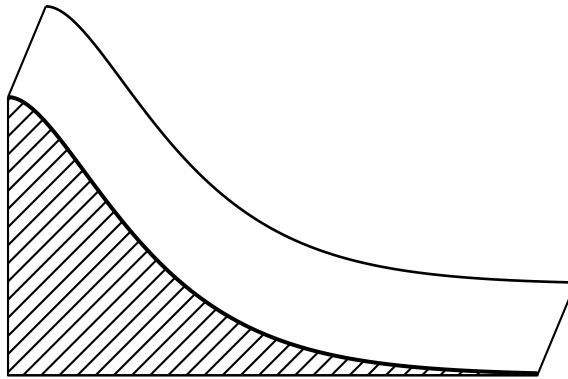


Polynésie 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (commun à tous les candidats)

Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un toboggan pour les pandas. Il réalise le schéma suivant de ce toboggan en perspective cavalière.

Voici ce schéma :

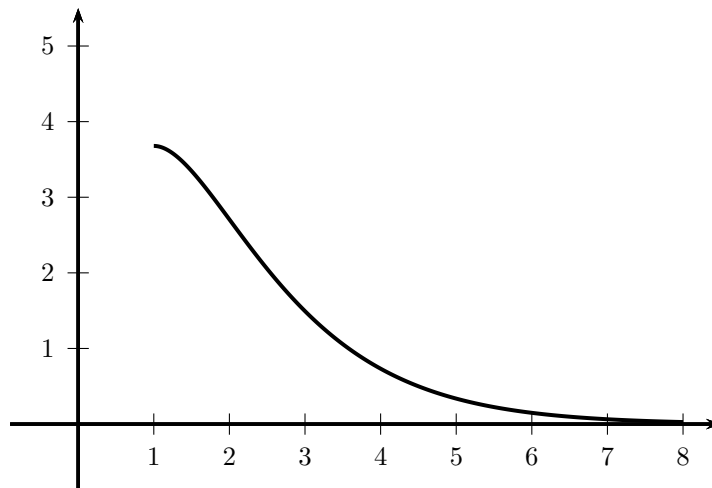


Partie A. Modélisation

Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe \mathcal{C} représentant la fonction f définie sur l'intervalle $[1, 8]$ par

$$f(x) = (ax + b)e^{-x} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux entiers naturels.}$$

La courbe \mathcal{C} est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.



- 1) On souhaite que la tangente à la courbe \mathcal{C} en son point d'abscisse 1 soit horizontale. Déterminer la valeur de l'entier b .
- 2) On souhaite que le haut du toboggan soit situé entre 3,5 et 4 mètres de haut. Déterminer la valeur de l'entier a .

Partie B. Un aménagement pour les visiteurs

On admet dans la suite que la fonction f introduite dans la partie A est définie pour tout réel $x \in [1, 8]$ par

$$f(x) = 10xe^{-x}.$$

Le mur de soutènement du toboggan sera peint par un artiste sur une seule face, hachurée sur le schéma en début d'exercice. Sur le devis qu'il propose, celui-ci demande un forfait de 300 euros augmenté de 50 euros par mètre carré peint.

- 1) Soit g la fonction définie sur $[1, 8]$ par

$$g(x) = 10(-x - 1)e^{-x}.$$

Déterminer la fonction dérivée de la fonction g .

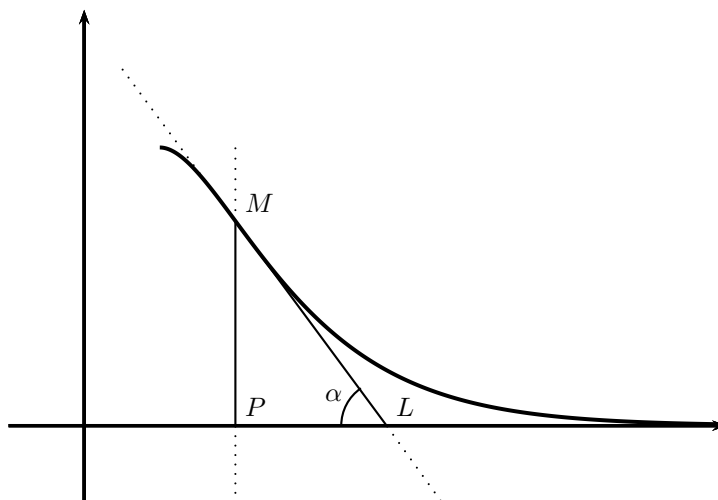
2) Quel est le montant du devis de l'artiste ?

Partie C. Une contrainte à vérifier

Des raisons de sécurité imposent de limiter la pente maximale du toboggan.

On considère un point M de la courbe \mathcal{C} , d'abscisse différente de 1. On appelle α l'angle aigu formé par la tangente en M à \mathcal{C} et l'axe des abscisses.

La figure suivante illustre la situation.



Les contraintes imposent que l'angle α soit inférieur à 55 degrés.

1) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[1, 8]$. On admet que, pour tout x de l'intervalle $[1, 8]$,

$$f'(x) = 10(1 - x)e^{-x}.$$

Étudier les variations de la fonction f' sur l'intervalle $[1 ; 8]$.

2) Soit x un réel de l'intervalle $]1 ; 8]$ et soit M le point d'abscisse x de la courbe \mathcal{C} .

Justifier que $\tan \alpha = |f'(x)|$.

3) Le toboggan est-il conforme aux contraintes imposées ?