Polynésie 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (4 points) (commun à tous les candidats)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. A tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = z^2 + 4z + 3.$$

1) Un point M est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point M' associé.
Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

2) Soit A le point d'affixe $\dfrac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\dfrac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$.
Montrer que OAB est un triangle équilatéral.

3) Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe $z = x + iy$ où x et y sont réels, tels que le point M' associé soit sur l'axe des réels.

4) Dans le plan complexe, représenter les points A et B ainsi que l'ensemble $\mathscr{E}$.

Polynésie 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) Soit M un point du plan d'affixe z.

$$\begin{aligned} M \text{ invariant} &\Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow z^2 + 4z + 3 = z \\ &\Leftrightarrow z^2 + 3z + 3 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation $z^2+3z+3=0$ est $\Delta = 3^2 - 4\times 1\times 3 = -3 < 0$. Donc l'équation $z^2+3z+3=0$ admet deux solutions complexes non réelles conjuguées $z_1 = \dfrac{-3+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-3-i\sqrt{3}}{2}$.

Donc, il existe exactement deux points invariants, le point M_1 d'affixe $z_1 = -\dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = -\dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Déterminons la forme trigonométrique de z_1 et z_2.

$|z_1| = \sqrt{\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{4}} = \sqrt{3}$ puis

$$z_1 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3}e^{\frac{5i\pi}{6}}.$$

D'autre part, $z_2 = \overline{z_1} = \sqrt{3}e^{-\frac{5i\pi}{6}}$.

$$\boxed{z_1 = \sqrt{3}e^{\frac{5i\pi}{6}} \text{ et } z_2 = \sqrt{3}e^{-\frac{5i\pi}{6}}.}$$

2) On sait déjà que $OA = |z_A| = |z_2| = \sqrt{3}$ et $OB = |z_B| = |z_1| = \sqrt{3}$. Enfin,

$$AB = |z_B - z_A| = \left|-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \left|i\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}|i| = \sqrt{3}.$$

En résumé, $OA = OB = AB = \sqrt{3}$ et donc le triangle OAB est équilatéral.

3) Soient x et y deux réels puis $z = x+iy$.

$$\begin{aligned} z' &= z^2 + 4z + 3 = (x+iy)^2 + 4(x+iy) + 3 = x^2 + 2ixy - y^2 + 4x + 4iy + 3 \\ &= x^2 - y^2 + 4x + 3 + 2iy(x+2). \end{aligned}$$

Par suite,

$$M' \in (Ox) \Leftrightarrow z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}\,(z') = 0 \Leftrightarrow y(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } y = 0.$$

$$\boxed{\mathscr{E} \text{ est la réunion des droites d'équation respectives } x = -2 \text{ et } y = 0.}$$

4) Graphique.