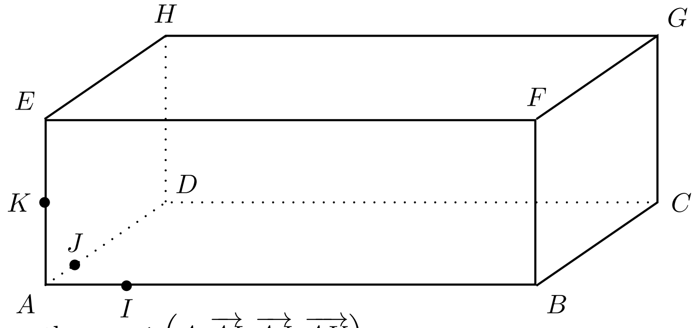
Polynésie 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (3 points) (commun à tous les candidats)

On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ ci-dessous, pour lequel $AB = 6$, $AD = 4$ et $AE = 2$.
I, J et K sont les points tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.



On se place dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK}\right)$.

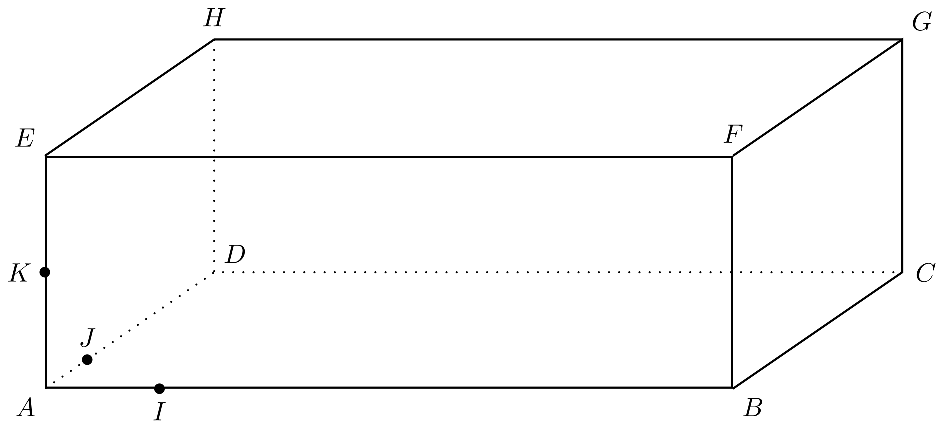
1) Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$ est normal au plan (IJG).

2) Déterminer une équation du plan (IJG).

3) Déterminer les coordonnées du point d'intersection L du plan (IJG) et de la droite (BF).

4) Tracer la section du pavé $ABCDEFGH$ par le plan (IJG). Ce tracé sera réalisé sur la figure donnée en **annexe à rendre avec la copie)**. On ne demande pas de justification.

Annexe, Exercice 1



Polynésie 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

1) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 6\overrightarrow{AI} + 4\overrightarrow{AJ} + 2\overrightarrow{AK}$. Donc, les coordonnées du point G sont $(6, 4, 2)$.
D'autre part, les coordonnées respectives des points I et J sont $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IG}$ sont $(5, 4, 2)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{JG}$ sont $(6, 3, 2)$.

S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{JG} = k\overrightarrow{IG}$, alors $k = 1$ (à partir de la troisième coordonnée) et aussi $k = \frac{3}{4}$ (à partir de la deuxième coordonnée. Ceci est impossible et donc les vecteurs $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{JG}$ ne sont pas colinéaires ou encore les points I, J et G ne sont pas alignés. On en déduit que les points I, J et G définissent un unique plan.

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{IG} = 2 \times 5 + 2 \times 4 + (-9) \times 2 = 10 + 8 - 18 = 0$$

et

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{JG} = 2 \times 6 + 2 \times 3 + (-9) \times 2 = 12 + 6 - 18 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{JG}$ qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (IJG). Donc, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (IJG).

2) Le plan (IJG) est le plan passant par $I(1, 0, 0)$ de vecteur normal $\overrightarrow{n}(2, 2, -9)$. Une équation du plan (IJG) est donc

$$2(x - 1) + 2(y - 0) - 9(z - 0) = 0$$

ou encore $2x + 2y - 9z - 2 = 0$.

3) $\overrightarrow{AB} = 6\overrightarrow{AI}$ et donc les coordonnées du point B sont $(6, 0, 0)$.
$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 6\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{AK}$ et donc les coordonnées du point F sont $(6, 0, 2)$.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BF}$ sont donc $(0, 0, 2)$.

La droite (BF) est la droite passant par $B(6, 0, 0)$ et de vecteur directeur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BF}(0, 0, 1)$. Une représentation paramétrique de la droite (BF) est

$$\left\{\begin{array}{l} x = 6 \\ y = 0 \\ z = t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

Soit $M(6, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (BF).

$$M \in (IJG) \Leftrightarrow 2 \times 6 + 2 \times 0 - 9 \times t - 2 = 0 \Leftrightarrow 10 - 9t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{10}{9}.$$

Pour $t = \frac{10}{9}$, on obtient les coordonnées du point L :

$$\boxed{L\left(6, 0, \frac{10}{9}\right).}$$

4) Graphique. (La droite d'inetrsection des plans (IJG) et (DCH) est parallèle à la droite (IL)).