Nouvelle Calédonie novembre 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On considère deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n) définies par $d_0 = 300$, $a_0 = 450$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 0$

$$\begin{cases} d_{n+1} = \dfrac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}d_n + \dfrac{1}{2}a_n + 70 \end{cases}$$

1) Calculer d_1 et a_1.

2) On souhaite écrire un algorithme qui permet d'afficher en sortie les valeurs de d_n et a_n pour une valeur entière de n saisie par l'utilisateur.
L'algorithme suivant est proposé :

Variables :	n et k sont des entiers naturels D et A sont des réels
Initialisation :	D prend la valeur 300 A prend la valeur 450 Saisir la valeur de n
Traitement :	Pour k variant de 1 à n D prend la valeur $\dfrac{D}{2} + 100$ A prend la valeur $\dfrac{A}{2} + \dfrac{D}{2} + 70$ Fin pour
Sortie :	Afficher D Afficher A

a) Quels nombres obtient-on en sortie de l'algorithme pour $n = 1$?
Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus à la question **1)** ?

b) Expliquer comment corriger cet algorithme pour qu'il affiche les résultats souhaités.

3) a) Pour tout entier naturel n, on pose $e_n = d_n - 200$.
Montrer que la suite (e_n) est géométrique.

b) En déduire l'expression de d_n en fonction de n.

c) La suite (d_n) est-elle convergente ? Justifier.

4) On admet que pour tout entier naturel n,

$$a_n = 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340.$$

a) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $2n^2 \geqslant (n+1)^2$.

b) Montrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 4, $2^n \geqslant n^2$.

c) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4, $0 \leqslant 100n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leqslant \dfrac{100}{n}$.

d) Étudier la convergence de la suite (a_n).

Nouvelle Calédonie novembre 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

1) $d_1 = \frac{1}{2}d_0 + 100 = \frac{1}{2} \times 300 + 100 = 250$ et $a_1 = \frac{1}{2}d_0 + \frac{1}{2}a_0 + 70 = \frac{1}{2} \times 300 + \frac{1}{2} \times 450 + 70 = 445$.

$$\boxed{d_1 = 250 \text{ et } a_1 = 445.}$$

2) a) L'algorithme affiche $D = 250$ qui est bien la valeur de d_1 mais ensuite l'algorithme affiche $A = 420$ qui n'est pas la valeur de a_1.

b) Algorithme modifié : 1ère solution

Variables :	n et k sont des entiers naturels D et A sont des réels
Initialisation :	D prend la valeur 300 A prend la valeur 450 Saisir la valeur de n
Traitement :	Pour k variant de 1 à n A prend la valeur $\frac{A}{2} + \frac{D}{2} + 70$ D prend la valeur $\frac{D}{2} + 100$ Fin pour
Sortie :	Afficher D Afficher A

Algorithme modifié : 2ème solution

Variables :	n et k sont des entiers naturels M, D et A sont des réels
Initialisation :	D prend la valeur 300 A prend la valeur 450 Saisir la valeur de n
Traitement :	Pour k variant de 1 à n M prend la valeur D D prend la valeur $\frac{M}{2} + 100$ A prend la valeur $\frac{A}{2} + \frac{M}{2} + 70$ Fin pour
Sortie :	Afficher D Afficher A

3) a) Soit n un entier naturel.

$$e_{n+1} = d_{n+1} - 200 = \frac{1}{2}d_n + 100 - 200 = \frac{1}{2}d_n - 100 = \frac{1}{2}(d_n - 200) = \frac{1}{2}e_n.$$

Don la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

b) D'autre part, $e_0 = d_0 - 200 = 300 - 200 = 100$. On sait alors que pour tout entier naturel n,

$$e_n = e_0 \times q^n = 100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

On en déduit encore que pour tout entier naturel n, $d_n = e_n + 200 = 200 + 100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ d_n = 200 + 100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.}$$

c) Puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on sait que $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. On en déduit que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} d_n = 200.}$$

4) a) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

$$2n^2 - (n+1)^2 = 2n^2 - n^2 - 2n - 1 = n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2.$$

Ensuite, $n \geqslant 3 \Rightarrow n - 1 \geqslant 2 \Rightarrow (n-1)^2 \geqslant 4 \Rightarrow (n-1)^2 - 2 \geqslant 2$. En particulier, $(n-1)^2 - 2 \geqslant 0$ ou encore $2n^2 - (n+1)^2 \geqslant 0$ ou enfin $2n^2 \geqslant (n+1)^2$.

b) Montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.

- $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$. Donc, $2^4 \geqslant 4^2$. L'inégalité à démontrer est vraie quand $n = 4$.
- Soit $n \geqslant 4$. Supposons que $2^n \geqslant n^2$. Alors,

$$\begin{aligned}
2^{n+1} &= 2 \times 2^n \\
&\geqslant 2 \times n^2 \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&\geqslant (n+1)^2 \text{ (d'après la question précédente et car } n \geqslant 4 \Rightarrow n \geqslant 3).
\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.

c) Soit n un entier supérieur ou égal à 4.

$$\begin{aligned}
0 < n^2 \leqslant 2^n &\Rightarrow \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{n^2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{1}{n^2} \Rightarrow 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{100n}{n^2} \\
&\Rightarrow 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{100}{n}.
\end{aligned}$$

d) Pour tout $n \geqslant 4$, $0 \leqslant 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{100}{n}$ avec $\lim_{n\to+\infty} \frac{100}{n} = 0$. Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty} 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. D'autre part, $\lim_{n\to+\infty} 110\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 340.}$$

