Nouvelle Calédonie novembre 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (commun à tous les candidats)

Soient x, y et z trois nombres réels. On considère les implications (P_1) et (P_2) suivantes :

$$(P_1) \qquad (x+y+z=1) \Rightarrow \left(x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3}\right)$$

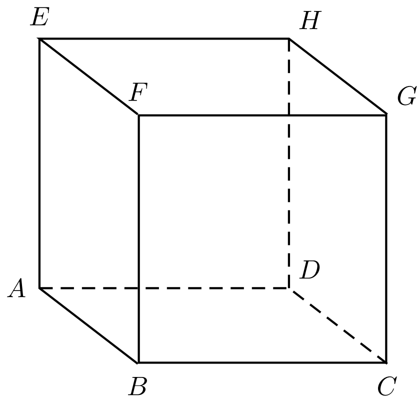
$$(P_2) \qquad \left(x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3}\right) \Rightarrow (x+y+z=1)$$

Partie A

L'implication (P_2) est-elle vraie ?

Partie B

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$, représenté ci-dessous, et on définit le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1) a) Vérifier que le plan d'équation $x+y+z=1$ est le plan (BDE).

b) Montrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

c) Montrer que l'intersection de la droite (AG) avec le plan (BDE) est le point K de coordonnées $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

2) Le triangle BDE est-il équilatéral ?

3) Soit M un point de l'espace.

a) Démontrer que si M appartient au plan (BDE), alors $AM^2 = AK^2 + MK^2$.

b) En déduire que si M appartient au plan (BDE), alors $AM^2 \geqslant AK^2$.

c) Soient x, y et z des réels quelconques. En appliquant le résultat de la question précédente au point M de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$, montrer que l'implication (P_1) est vraie.

Nouvelle Calédonie novembre 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Partie A

Prenons $x = y = z = 1$. On a $x^2 + y^2 + z^2 = 3 \geqslant \dfrac{1}{3}$ mais $x + y + z = 3 \neq 1$. Donc l'implication (P_2).

Partie B

1) a) La droite (BE) est contenue dans le plan (ABE) et le point D n'appartient pas à ce plan. Donc le point D n'appartient pas à la droite (BE) ou encore les points B, D et E ne sont pas alignés. On en déduit que les points B, D et E définissent un unique plan, le plan (BDE).

Les points B, D et E ont pour coordonnées respectives $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$. Les coordonnées de chacun de ces points vérifient l'équation $x + y + z = 1$. Donc, le plan d'équation $x + y + z = 1$ est le plan (BDE).

b) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$. Donc, le point G a pour coordonnées $(1, 1, 1)$. D'autre part, le point A a pour coordonnées $(0, 0, 0)$ et donc le vecteur $\overrightarrow{AG}$ a pour coordonnées $(1, 1, 1)$.

Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan d'équation $1 \times x + 1 \times y + 1 \times z = 1$ qui est le plan (BDE). Donc la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

c) La droite (AG) est la droite passant par $A(0, 0, 0)$ et de vecteur directeur directeur $\overrightarrow{AG}(1, 1, 1)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (AG) est donc $\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = t \\ z = t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

Soit $M(t, t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (AG).

$$M \in (BDE) \Leftrightarrow t + t + t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}.$$

Quand $t = \dfrac{1}{3}$, on obtient les coordonnées du point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BDE) : le point K de coordonnées $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

2) Les longueurs BD, BE et DE sont toutes trois égales à la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 à savoir $\sqrt{2}$. Donc, le triangle BDE est équilatéral.

3) a) Soit M un point du plan (BDE) distinct de M. Le point K est le projeté orthogonal du point A sur le plan (BDE). Donc le triangle AKM est rectangle en K. D'après le théorème de Pythagore,

$$AM^2 = AK^2 + KM^2.$$

Cette égalité reste vraie quand $M = K$ car alors $AK^2 + KM^2 = AK^2 + 0 = AK^2$.

b) Pour tout point M du plan (BDE), on a $MK^2 \geqslant 0$ puis $AK^2 + MK^2 \geqslant AK^2$ et donc $AM^2 \geqslant AK^2$.

c) Soient x, y et z trois réels tels que $x + y + z = 1$. Soit M le point de l'espace dont les coordonnées sont (x, y, z). D'après la question 1), M est un point du plan (BDE). D'après la question 3)b), $AM^2 \geqslant AK^2$. Or

$$AM^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

D'autre part, d'après la question 1)c)

$$AK^2 = \left(\frac{1}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 0\right)^2 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Donc, $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \dfrac{1}{3}$. On a montré que l'implication (P_1) est vraie.

