Nouvelle Calédonie novembre 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (7 points) (commun à tous les candidats)

Une usine produit de l'eau minérale en bouteilles. Lorsque le taux de calcium dans une bouteille est inférieur à 6,5 mg par litre, on dit que l'eau de cette bouteille est très peu calcaire.

Dans cet exercice les résultats approchés seront arrondis au millième.

Partie A

L'eau minérale provient de deux sources, notées « source A » et « source B ».
La probabilité que l'eau d'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source A soit très peu calcaire est $0,17$. La probabilité que l'eau d'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source B soit très peu calcaire est $0,10$.

La source A fournit 70% de la production quotidienne totale des bouteilles d'eau et la source B le reste de cette production.

On prélève au hasard une bouteille d'eau dans la production totale de la journée. On considère les évènements suivants :

A : « La bouteille d'eau provient de la source A »
B : « La bouteille d'eau provient de la source B »
S : « L'eau contenue dans la bouteille d'eau est très peu calcaire ».

1) Déterminer la probabilité de l'évènement $A \cap S$.

2) Montrer que la probabilité de l'évènement S vaut $0,149$.

3) Calculer la probabilité que l'eau contenue dans une bouteille provienne de la source A sachant qu'elle est très peu calcaire.

4) Le lendemain d'une forte pluie, l'usine prélève un échantillon de 1 000 bouteilles provenant de la source A. Parmi ces bouteilles, 211 contiennent de l'eau très peu calcaire.
Donner un intervalle permettant d'estimer au seuil de 95% la proportion de bouteilles contenant de l'eau très peu calcaire sur l'ensemble de la production de la source A après cette intempérie.

Partie B

On note X la variable aléatoire qui, à chaque bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source A, associe le taux de calcium de l'eau qu'elle contient. On suppose que X suit la loi normale de moyenne 8 et d'écart-type $1,6$.
On note Y la variable aléatoire qui, à chaque bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source B, associe le taux de calcium qu'elle contient. On suppose que Y suit la loi normale de moyenne 9 et d'écart-type σ.

1) Déterminer la probabilité pour que le taux de calcium mesuré dans une bouteille prise au hasard dans la production d'une journée de la source A soit compris entre $6,4$ mg et $9,6$ mg.

2) Calculer la probabilité $p(X \leqslant 6,5)$.

3) Déterminer σ sachant que la probabilité qu'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source B contienne de l'eau très peu calcaire est $0,1$.

Partie C

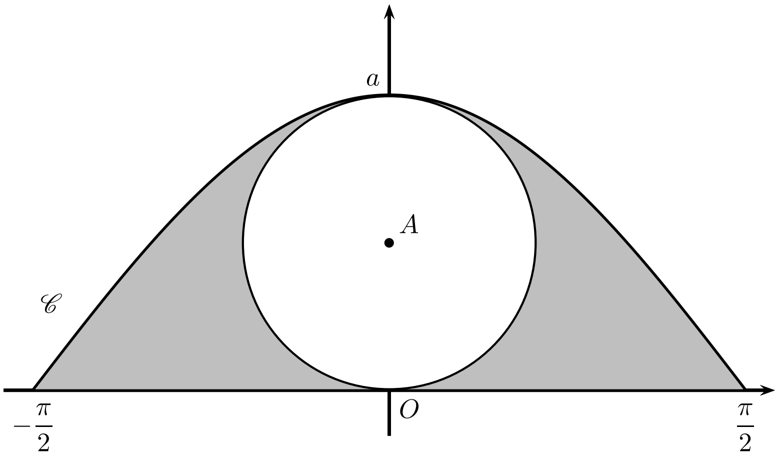
Le service commercial a adopté pour les étiquettes des bouteilles la forme représentée ci-dessous dans un repère orthonormé du plan.

La forme de ces étiquettes est délimitée par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = a\cos x$ avec $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ et a un réel strictement positif.

Un disque situé à l'intérieur est destiné à recevoir les informations données aux acheteurs. On considère le disque de centre le point A de coordonnées $\left(0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{a}{2}$. On admettra que ce disque se trouve entièrement en dessous de la courbe $\mathscr{C}$ pour des valeurs de a inférieures à $1,4$.

1) Justifier que l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = -\dfrac{\pi}{2}$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$, et la courbe $\mathscr{C}$ est égale à $2a$ unités d'aire.

2) Pour des raisons esthétiques, on souhaite que l'aire du disque soit égale à l'aire de la surface grisée.
Quelle valeur faut-il donner au réel a pour respecter cette contrainte ?



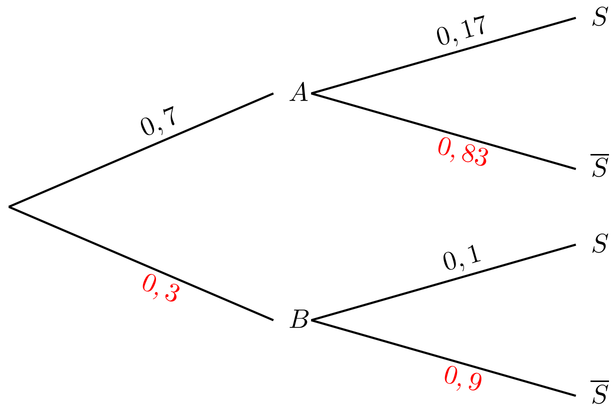
a
A
$\mathscr{C}$
$-\frac{\pi}{2}$
O
$\frac{\pi}{2}$

Nouvelle Calédonie novembre 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) Représentons la situation par un arbre de probabilité.



$p(A \cap S) = p(A) \times p_A(S) = 0,7 \times 0,17 = 0,119$.

$$\boxed{p(A \cap S) = 0,119.}$$

2) D'après la formule des probabilités totales,

$$p(S) = p(A \cap S) + p(B \cap S) = 0,119 + 0,3 \times 0,1 = 0,149.$$

3) La probabilité demandée est $p_S(A)$.

$$p_S(A) = \frac{p(A \cap S)}{p(S)} = \frac{0,119}{0,149} = 0,799 \text{ arrondi au millième.}$$

4) Déterminons un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95%. Ici, $n = 1000$. D'autre part, la fréquence observée est $f = \dfrac{211}{1000} = 0,211$. On note que $n \geqslant 30$ puis que $nf = 211 \geqslant 5$ et $n(1-f) = 789 \geqslant 5$.
Un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95% est

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,211 - \frac{1}{\sqrt{1000}}, f + \frac{1}{\sqrt{1000}}\right] = [0,179; 0,243]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle.

Partie B

1) La probabilité demandée est $P(6,4 \leqslant X \leqslant 9,6) = P\left(\mu_X - \sigma_X \leqslant X \leqslant \mu_X + \sigma_X\right)$. La calculatrice (ou le cours) fournit

$$P(6,4 \leqslant X \leqslant 9,6) = 0,683 \text{ arrondi au millième.}$$

2) La calculatrice fournit

$$P(X \leqslant 6,5) = 0,174 \text{ arrondi au millième.}$$

3) D'après la phrase initiale de l'énoncé, dire que l'eau est très peu calcaire équivaut à dire que $Y \leqslant 6,5$. Or,

$$Y \leqslant 6,5 \Leftrightarrow Y - 9 \leqslant -2,5 \Leftrightarrow \frac{Y-9}{\sigma} \leqslant -\frac{2,5}{\sigma}.$$

La probabilité donnée dans l'énoncé est donc encore $P\left(\dfrac{Y-9}{\sigma} \leqslant -\dfrac{2,5}{\sigma}\right)$ où cette fois-ci la variable $\dfrac{Y-9}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite. La calculatrice fournit

$$P(Y \leqslant 6,5) = 0,1 \Leftrightarrow P\left(\frac{Y-9}{\sigma} \leqslant -\frac{2,5}{\sigma}\right) = 0,1 \Leftrightarrow -\frac{2,5}{\sigma} = -1,2815\ldots \Leftrightarrow \sigma = 1,951 \text{ arrondi au millième.}$$

Partie C

1) La fonction $x \mapsto a\cos x$ est continue et positive sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc, l'aire emandée, exprimée en unités d'aire est

$$\mathscr{A}_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos x\, dx = [a\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = a\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = a(1-(-1)) = 2a.$$

2) D'autre part, l'aire du disque est $\mathscr{A}_2 = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}$.

$$\mathscr{A}_2 = \mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2 \Leftrightarrow \frac{\pi a^2}{4} = 2a - \frac{\pi a^2}{4} \Leftrightarrow \frac{\pi a^2}{2} = 2a \Leftrightarrow a = \frac{4}{\pi}.$$

De plus, $\frac{4}{\pi} = 1,2\ldots$ et en particulier, $\frac{4}{\pi} < 1,4$. La contrainte est respectée pour $a = \frac{4}{\pi}$.

