

# Nouvelle Calédonie mars 2015. Enseignement spécifique

## EXERCICE 3 : corrigé

1) a)  $D_1$  est la droite passant par  $A_1(0, 2, -1)$  et de vecteur directeur  $\vec{u}_1(1, 2, 3)$ . Une représentation paramétrique de la droite  $D_1$  est

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

b) Un vecteur directeur de la droite  $D_2$  est  $\vec{u}_2(1, -2, 0)$ .

c) Soit  $M(1+k, -2k, 2)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , un point de la droite  $D_2$ .

$$M = A_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1+k = -1 \\ -2k = 4 \\ 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ k = -2 \end{cases} \Leftrightarrow k = -2.$$

Pour  $k = -2$ , on obtient effectivement le point  $A_2(-1, 4, 2)$ . Le point  $A_2$  appartient à la droite  $D_2$ .

2) S'il existe un réel  $\lambda$  tel que  $\vec{u}_1 = \lambda \vec{u}_2$ , la troisième coordonnée fournit  $1 = 0 \times \lambda$  ce qui est impossible. Donc les vecteurs  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  ne sont pas colinéaires ou encore les droites  $D_1$  et  $D_2$  ne sont pas parallèles. On en déduit que les droites  $D_1$  et  $D_2$  sont sécantes ou non coplanaires.

Soient  $M_1(t, 2+2t, -1+3t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , un point de la droite  $D_1$  et  $M_2(1+k, -2k, 2)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , un point de la droite  $D_2$ .

$$M_1 = M_2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1+k \\ 2+2t = -2k \\ -1+3t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ 1 = 1+k \\ 2+2 = -2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ k = 0 \\ k = -2 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution ou encore les droites  $D_1$  et  $D_2$  n'ont pas de point commun. On en déduit que les droites  $D_1$  et  $D_2$  sont non coplanaires.

3)  $\vec{v} \cdot \vec{u}_1 = (-6) \times 1 + (-3) \times 2 + 4 \times 3 = -6 - 6 + 12 = 0$ . Donc, les droites  $D_1$  et  $\Delta_1$  sont orthogonales. De plus, les droites  $D_1$  et  $\Delta_1$  sont sécantes en  $A_1$  et finalement les droites  $D_1$  et  $\Delta_1$  sont perpendiculaires.

4) a)  $\vec{n} \cdot \vec{u}_1 = 17 \times 1 + (-22) \times 2 + 9 \times 3 = 17 - 44 + 27 = 0$  et  $\vec{n} \cdot \vec{v} = 17 \times (-6) + (-22) \times (-3) + 9 \times 4 = -102 + 66 + 36 = 0$ . Ainsi, le vecteur  $\vec{n}$  est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan  $P_1$ . On en déduit que  $\vec{n}$  est un vecteur normal à  $P_1$ .

b)  $\vec{n} \cdot \vec{u}_2 = 17 \times 1 + (-22) \times (-2) + 9 \times 0 = 17 + 44 = 61 \neq 0$ . Donc,  $\vec{n}$  n'est pas orthogonal à  $\vec{u}_2$  qui est un vecteur du plan  $P_2$ . En particulier, les plans  $P_1$  et  $P_2$  ne sont pas parallèles.

5)  $\Delta$  est dirigée par  $\vec{v}$ ,  $D_1$  est dirigée par  $\vec{u}_1$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{u}_1$  sont orthogonaux. Donc, les droites  $\Delta$  et  $D_1$  sont orthogonales. De plus, les droites  $\Delta$  et  $D_1$  sont coplanaires car contenues dans le plan  $P_1$ . On en déduit que les droites  $\Delta$  et  $D_1$  sont perpendiculaires.

De même, les droites  $\Delta$  et  $D_2$  sont perpendiculaires et on a donc trouvé une droite perpendiculaire aux droites  $D_1$  et  $D_2$ , à savoir la droite  $\Delta$ .