Nouvelle Calédonie mars 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (commun à tous les candidats)

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

On rappelle que deux droites de l'espace sont dites perpendiculaires si et seulement si elles sont orthogonales et sécantes.

Soient le point A_1 de coordonnées $(0\ ;\ 2\ ;\ -1)$ et le vecteur $\overrightarrow{u_1}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On appelle D_1 la droite passant par A_1 et de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$.
On appelle D_2 la droite qui admet pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + k \\ y = -2k \\ z = 2 \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{R}).$$

Le but de l'exercice est de prouver l'existence d'une droite perpendiculaire à la fois à D_1 et D_2.

1) a) Donner une représentation paramétrique de D_1.

b) Donner un vecteur directeur de D_2 (on le notera $\overrightarrow{u_2}$).

c) Le point $A_2(-1\ ;\ 4\ ;\ 2)$ appartient-il à D_2 ?

2) Démontrer que les droites D_1 et D_2 sont non coplanaires.

3) Soit le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. On définit la droite Δ_1 passant par A_1 et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ et la droite Δ_2 passant par A_2 et parallèle à Δ_1.
Justifier que les droites D_1 et Δ_1 sont perpendiculaires.

Dans la suite, on admettra que les droites D_2 et Δ_2 sont perpendiculaires.

4) Soit P_1 le plan défini par les droites D_1 et Δ_1 et P_2 le plan défini par les droites D_2 et Δ_2.

a) Soit le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 17 \\ -22 \\ 9 \end{pmatrix}$. Vérifier que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan P_1.

b) Montrer que P_1 et P_2 ne sont pas parallèles.

5) Soit Δ la droite d'intersection des plans P_1 et P_2. On admettra que le vecteur $\overrightarrow{v}$ est un vecteur directeur de Δ.
Utiliser les questions précédentes pour prouver qu'il existe une droite de l'espace perpendiculaire à la fois à D_1 et à D_2.

Nouvelle Calédonie mars 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

1) a) D_1 est la droite passant par $A_1(0,2,-1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}(1,2,3)$. Une représentation paramétrique de la droite D_1 est

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2+2t \\ z = -1+3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

b) Un vecteur directeur de la droite D_2 est $\overrightarrow{u_2}(1,-2,0)$.

c) Soit $M(1+k,-2k,2)$, $k \in \mathbb{R}$, un point de la droite D_2.

$$M = A_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1+k = -1 \\ -2k = 4 \\ 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ k = -2 \end{cases} \Leftrightarrow k = -2.$$

Pour $k = -2$, on obtient effectivement le point $A_2(-1,4,2)$. Le point A_2 appartient à la droite D_2.

2) S'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{u_1} = \lambda\overrightarrow{u_2}$, la troisième coordonnée fournit $1 = 0 \times \lambda$ ce qui est impossible. Donc les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires ou encore les droites D_1 et D_2 ne sont pas parallèles. On en déduit que les droites D_1 et D_2 sont sécantes ou non coplanaires.

Soient $M_1(t,2+2t,-1+3t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite D_1 et $M_2(1+k,-2k,2)$, $k \in \mathbb{R}$, un point de la droite D_2.

$$M_1 = M_2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1+k \\ 2+2t = -2k \\ -1+3t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ 1 = 1+k \\ 2+2 = -2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ k = 0 \\ k = -2 \end{cases}$$

Ce sytème n'a pas de solution ou encore les droites D_1 et D_2 n'ont pas de point commun. On en déduit que les droites D_1 et D_2 sont non coplanaires.

3) $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u_1} = (-6)\times 1 + (-3)\times 2 + 4\times 3 = -6-6+12 = 0$. Donc, les droites D_1 et Δ_1 sont orthogonales. De plus, les droites D_1 et Δ_1 sont sécantes en A_1 et finalement les droites D_1 et Δ_1 sont perpendiculaires.

4) a) $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u_1} = 17\times 1+(-22)\times 2+9\times 3 = 17-44+27 = 0$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{v} = 17\times(-6)+(-22)\times(-3)+9\times 4 = -102+66+36 = 0$. Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan P_1. On en déduit que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à P_1.

b) $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u_2} = 17\times 1+(-22)\times(-2)+9\times 0 = 17+44 = 61 \neq 0$. Donc, $\overrightarrow{n}$ n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{u_2}$ qui est un vecteur du plan P_2. En particulier, les plans P_1 et P_2 ne sont pas parallèles.

5) Δ est dirigée par $\overrightarrow{v}$, D_1 est dirigée par $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u_1}$ sont orthogonaux. Donc, les droites Δ et D_1 sont orthogonales. De plus, les droites Δ et D_1 sont coplanaires car contenues dans le plan P_1. On en déduit que les droites Δ et D_1 sont perpendiculaires.

De même, les droites Δ et D_2 sont perpendiculaires et on a donc trouvé une droite perpendiculaire aux droites D_1 et D_2, à savoir la droite Δ.

