Liban 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (6 points)

On définit la suite (u_n) de la façon suivante :

pour tout entier naturel n, $\quad u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$.

1) Calculer $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$.

2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

b) En déduire la valeur exacte de u_1.

3) a) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie le terme de rang n de la suite (u_n) où n est un entier naturel saisi en entrée par l'utilisateur.

Variables :	i et n sont des entiers naturels u est un réel
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à u la valeur …
Traitement :	Pour i variant de 1 à … Affecter à u la valeur … Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

b) A l'aide de cet algorithme, on a obtenu le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4	5	10	50	100
u_n	$0,6931$	$0,3069$	$0,1931$	$0,1402$	$0,1098$	$0,0902$	$0,0475$	$0,0099$	$0,0050$

Quelles conjectures concernant le comportement de la suite (u_n) peut-on émettre ?

4) a) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

5) On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Démontrer que $\ell = 0$.

Liban 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$.

$$\boxed{u_0 = \ln(2).}$$

2) a) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} + u_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^{n+1}+x^n}{1+x}\,dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{1+x}\,dx = \int_0^1 x^n\,dx \\
&= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} \\
&= \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}.}$$

b) $u_1 = \dfrac{1}{0+1} - u_0 = 1 - \ln(2)$.

$$\boxed{u_1 = 1 - \ln(2).}$$

3) a) Algorithme complété.

Variables :	i et n sont des entiers naturels u est un réel
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à u la valeur $\ln(2)$
Traitement :	Pour i variant de 1 à n
	Affecter à u la valeur $\dfrac{1}{i} - u$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

b) Il semble que la suite (u_n) soit décroissante, convergente, de limite nulle.

4) a) Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1}-x^n}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}\,dx$$

Pour tout réel x de $[0,1]$, $x^n \geqslant 0$, $x-1 \leqslant 0$ et $1+x > 0$. Donc, pour tout réel x de $[0,1]$, $\dfrac{x^n(x-1)}{1+x} \leqslant 0$. Par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}\,dx \leqslant 0$ ou encore $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ ou encore $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

b) Pour tout réel x de $[0,1]$, $\dfrac{x^n}{1+x} \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \geqslant 0$ ou encore $u_n \geqslant 0$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel positif ou nul.

5) Soit n un entier naturel. Puisque $u_{n+1} \geqslant 0$,

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_n + u_{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

