

Liban 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

1) a) Le point F a pour coordonnées $(1, 0, 1)$ et le point D a pour coordonnées $(0, 1, 0)$. Donc le vecteur \overrightarrow{FD} a pour coordonnées $(-1, 1, -1)$.

Le point I a pour coordonnées $(\frac{1}{2}, 0, 0)$, le point J a pour coordonnées $(0, \frac{1}{2}, 1)$ et le point K a pour coordonnées $(1, \frac{1}{2}, 0)$.

Le vecteur \overrightarrow{IJ} a pour coordonnées $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$.

$$\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{IJ} = (-1) \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times 1 = 0.$$

Le vecteur \overrightarrow{IK} a pour coordonnées $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.

$$\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{IK} = (-1) \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times 0 = 0.$$

On en déduit que la droite (FD) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (IJK) (les vecteurs \overrightarrow{IJ} et \overrightarrow{IK} étant deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) , les droites (IJ) et (IK) sont deux droites sécantes du plan (IJK)) et donc la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK) .

b) Le plan (IJK) est le plan passant par $I(\frac{1}{2}, 0, 0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{FD}(-1, 1, -1)$. Une équation cartésienne de ce plan est $-\left(x - \frac{1}{2}\right) + (y - 0) - (z - 0) = 0$ ou encore

$$\text{le plan } (IJK) \text{ a pour équation } x - y + z - \frac{1}{2} = 0.$$

2) La droite (FD) est la droite passant par $D(0, 1, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{FD}(-1, 1, -1)$. Donc,

$$\text{un système d'équations paramétriques de la droite } (FD) \text{ est } \begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

3) Soit $N(-t, 1+t, -t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point quelconque de la droite (FD) .

$$N \in (IJK) \Leftrightarrow (-t) - (1+t) + (-t) - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow -3t = \frac{3}{2} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}.$$

Pour $t = -\frac{1}{2}$, on obtient le point M de coordonnées $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

4) $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{IK} = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1 \times 0 = 0$. D'après le théorème de PYTHAGORE, le triangle IJK est rectangle en I . L'aire du triangle IJK est donc

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{IJ \times IK}{2}. \\ IJ &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ et } IK = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ Donc,} \\ \mathcal{A} &= \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

5) D'après la question 3, le projeté orthogonal du point F sur le plan (IJK) est le point M . Donc, le volume du tétraèdre $FIJK$ est

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \frac{\text{aire}(IJK) \times MF}{3}. \\ MF &= \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Donc,} \end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{3}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{8}.$$

6) Le point I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ et le vecteur \overrightarrow{IJ} a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$. Un système d'équations

paramétriques de la droite (IJ) est
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{t}{2} \\ y = \frac{t}{2} \\ z = t \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

Le point K a pour coordonnées $\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$ et le point L a pour coordonnées $\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$. Donc, le vecteur \overrightarrow{KL} a pour

coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (KL) est
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} + \frac{t'}{2} \\ z = \frac{t'}{2} \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

Soient $P\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{2}, \frac{t}{2}, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (IJ) et $Q\left(1, \frac{1}{2} + \frac{t'}{2}, \frac{t'}{2}\right)$, $t' \in \mathbb{R}$, un point de la droite (KL) .

$$P = Q \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{t}{2} = 1 \\ \frac{t}{2} = \frac{1}{2} + \frac{t'}{2} \\ t = \frac{t'}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t' = -2 \\ t' = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t' = -2 \end{cases}.$$

Pour $t = -1$ (ou $t' = -2$), on obtient le point $P\left(1, -\frac{1}{2}, -1\right)$. Les droites (IJ) et (KL) sont sécantes en $P\left(1, -\frac{1}{2}, -1\right)$.