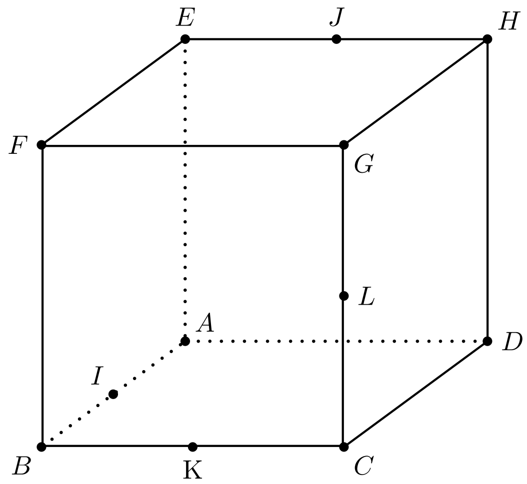
Liban 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (6 points)

$ABCDEFGH$ est un cube.



I est le milieu du segment $[AB]$, J est le milieu du segment $[EH]$, K est le milieu du segment $[BC]$ et L est le milieu du segment $[CG]$.

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

1) a) Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).

b) En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).

2) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).

3) Soit M le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK). Déterminer les coordonnées du point M.

4) Déterminer la nature du triangle IJK et calculer son aire.

5) Calculer le volume du tétraèdre $FIJK$.

6) Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?

Liban 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

1) a) Le point F a pour coordonnées $(1, 0, 1)$ et le point D a pour coordonnées $(0, 1, 0)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{FD}$ a pour coordonnées $(-1, 1, -1)$.

Le point I a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}, 0, 0\right)$, le point J a pour coordonnées $\left(0, \dfrac{1}{2}, 1\right)$ et le point K a pour coordonnées $\left(1, \dfrac{1}{2}, 0\right)$.

Le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 1\right)$.

$$\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{IJ} = (-1) \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times 1 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{IK}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 0\right)$.

$$\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{IJ} = (-1) \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times 0 = 0.$$

On en déduit que la droite (FD) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (IJK) (les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ étant deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK), les droites (IJ) et (IK) sont deux droites sécantes du plan (IJK)) et donc la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).

b) Le plan (IJK) est le plan passant par $I\left(\dfrac{1}{2}, 0, 0\right)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{FD}(-1, 1, -1)$. Une équation cartésienne de ce plan est $-\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + (y - 0) - (z - 0) = 0$ ou encore

$$\boxed{\text{le plan } (IJK) \text{ a pour équation } x - y + z - \frac{1}{2} = 0.}$$

2) La droite (FD) est la droite passant par $D(0, 1, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{FD}(-1, 1, -1)$. Donc,

$$\boxed{\text{un système d'équations paramétriques de la droite } (FD) \text{ est } \left\{\begin{array}{l} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.}$$

3) Soit $N(-t, 1 + t, -t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point quelconque de la droite (FD).

$$N \in (IJK) \Leftrightarrow (-t) - (1 + t) + (-t) - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow -3t = \frac{3}{2} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}.$$

Pour $t = -\dfrac{1}{2}$, on obtient le point M de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

4) $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IK} = \left(-\dfrac{1}{2}\right) \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + 1 \times 0 = 0$. D'après le théorème de Pythagore, le triangle IJK est rectangle en I. L'aire du triangle IJK est donc

$$\mathscr{A} = \frac{IJ \times IK}{2}.$$

$IJ = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ et $IK = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Donc,

$$\mathscr{A} = \frac{\sqrt{\dfrac{3}{2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

5) D'après la question 3, le projeté orthogonal du point F sur le plan (IJK) est le point M. Donc, le volume du tétraèdre $FIJK$ est

$$\mathscr{V} = \frac{\text{aire}(IJK) \times MF}{3}.$$

$MF = \sqrt{\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(0 - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Donc,

$$\mathscr{V} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{3}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{8}.$$

6) Le point I a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (IJ) est $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} - \frac{t}{2} \\ y = \frac{t}{2} \\ z = t \end{array}\right., t' \in \mathbb{R}$.

Le point K a pour coordonnées $\left(1, \frac{1}{2}, 0\right)$ et le point L a pour coordonnées $\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$. Donc, le vecteur $\overrightarrow{KL}$ a pour coordonnées $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Un système d'équations paramétriques de la droite (KL) est $\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = \frac{1}{2} + \frac{t'}{2} \\ z = \frac{t'}{2} \end{array}\right., t' \in \mathbb{R}$.

Soient $P\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{2}, \frac{t}{2}, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (IJ) et $Q\left(1, \frac{1}{2} + \frac{t'}{2}, \frac{t'}{2}\right)$, $t' \in \mathbb{R}$, un point de la droite (KL).

$$P = Q \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2} - \frac{t}{2} = 1 \\ \frac{t}{2} = \frac{1}{2} + \frac{t'}{2} \\ t = \frac{t'}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = -1 \\ t' = -2 \\ t' = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = -1 \\ t' = -2 \end{array}\right. .$$

Pour $t = -1$ (ou $t' = -2$), on obtient le point $P\left(1, -\frac{1}{2}, -1\right)$. Les droites (IJ) et (KL) sont sécantes en $P\left(1, -\frac{1}{2}, -1\right)$.

