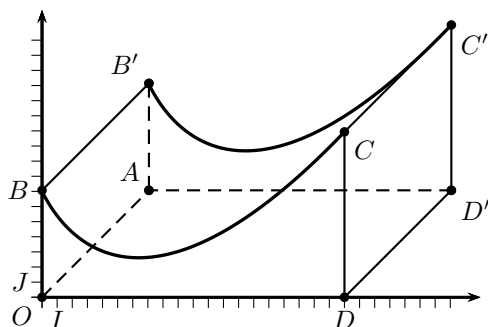


EXERCICE 4 (6 points)



Une municipalité a décidé d'installer un module de skateboard dans un parc de la commune.

Le dessin ci-contre en fournit une perspective cavalière. Les quadrilatères $OAD'D$, $DD'C'C$, et $OAB'B$ sont des rectangles.

Le plan de face (OBD) est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) .

L'unité est le mètre. La largeur du module est de 10 mètres, autrement dit $DD' = 10$, sa longueur OD est de 20 mètres.

Le but du problème est de déterminer l'aire des différentes surfaces à peindre.

Le profil du module de skateboard a été modélisé à partir d'une photo par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 20]$ par

$$f(x) = (x + 1) \ln(x + 1) - 3x + 7.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans le repère (O, I, J) .

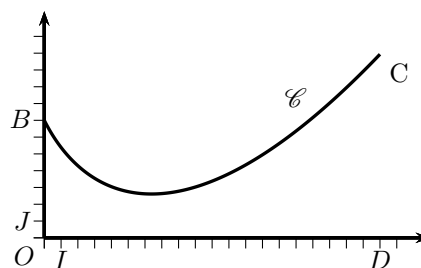
Partie 1

1) Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; 20]$, on a $f'(x) = \ln(x + 1) - 2$.

2) En déduire les variations de f sur l'intervalle $[0 ; 20]$ et dresser son tableau de variation.

3) Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0.

La valeur absolue de ce coefficient est appelée l'inclinaison du module de skateboard au point B .



4) On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; 20]$ par

$$g(x) = \frac{1}{2}(x + 1)^2 \ln(x + 1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$$

a pour dérivée la fonction g' définie sur l'intervalle $[0 ; 20]$ par $g'(x) = (x + 1) \ln(x + 1)$.

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 20]$.

Partie 2

Les trois questions de cette partie sont indépendantes

1) Les propositions suivantes sont-elles exactes? Justifier les réponses.

P_1 : la différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est au moins égale à 8 mètres.

P_2 : l'inclinaison de la piste est presque deux fois plus grande en B qu'en C .

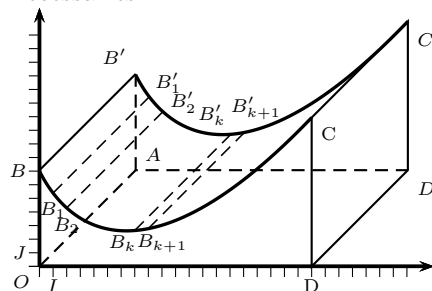
2) On souhaite recouvrir les quatre faces latérales de ce module d'une couche de peinture rouge. La peinture utilisée permet de couvrir une surface de 5 m^2 par litre.

Déterminer, à 1 litre près, le nombre minimum de litres de peinture nécessaires.

3) On souhaite peindre en noir la piste roulante, autrement dit la surface supérieure du module.

Afin de déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie à peindre, on considère dans le repère (O, I, J) du plan de face, les points $B_k(k ; f(k))$ pour k variant de 0 à 20.

Ainsi, $B_0 = B$.



On décide d'approcher l'arc de la courbe \mathcal{C} allant de B_k à B_{k+1} par le segment $[B_k B_{k+1}]$.

Ainsi l'aire de la surface à peindre sera approchée par la somme des aires des rectangles du type $B_k B_{k+1} B'_{k+1} B_k$ (voir figure).

a) Montrer que pour tout entier k variant de 0 à 19, $B_k B_{k+1} = \sqrt{1 + (f(k+1) - f(k))^2}$.

b) Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche une estimation de l'aire de la partie roulante.

Variables	S : réel K : entier
Fonction	f : définie par $f(x) = (x + 1) \ln(x + 1) - 3x + 7$
Traitement	S prend pour valeur 0 Pour K variant de ... à ... S prend pour valeur Fin Pour
Sortie	Afficher ...

EXERCICE 4 : corrigé

Partie 1

1) f est dérivable sur $[0, 20]$ et pour tout réel x de $[0, 20]$,

$$f'(x) = 1 \times \ln(x+1) + (x+1) \times \frac{1}{x+1} - 3 = \ln(x+1) + 1 - 3 = \ln(x+1) - 2.$$

Pour tout réel x de $[0, 20]$, $f'(x) = \ln(x+1) - 2$.

2) Soit $x \in [0, 20]$.

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow \ln(x+1) - 2 > 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) > 2 \\ &\Leftrightarrow x+1 > e^2 \text{ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R} \text{)} \\ &\Leftrightarrow x > e^2 - 1, \end{aligned}$$

avec $e^2 - 1 = 6,38\dots$ de sorte que $0 < e^2 - 1 < 20$. De même, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^2 - 1$.
D'autre part, $f(0) = \ln(1) + 7 = 7$, $f(20) = 21 \ln(21) - 53 = 10,9\dots$ et enfin,

$$f(e^2 - 1) = e^2 \ln(e^2) - 3(e^2 - 1) + 7 = 2e^2 - 3e^2 + 10 = 10 - e^2 = 2,6\dots$$

On en déduit le tableau de variation de f .

x	0	$e^2 - 1$	20
$f'(x)$	-	0	+
f	7	$2,6\dots$	$10,9\dots$

3) Le coefficient directeur de la tangente à la courbe \mathcal{C} en son point d'abscisse 0 est $f'(0)$ avec $f'(0) = \ln(1) - 2 = -2$.

4) La fonction g est une primitive de la fonction $x \mapsto (x+1) \ln(x+1)$ sur $[0, 20]$ et donc, une primitive de la fonction f sur $[0, 20]$ est la fonction F définie sur $[0, 20]$ par

$$F(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 \ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x^2 + 7x = \frac{1}{2}(x+1)^2 \ln(x+1) - \frac{7}{4}x^2 + \frac{13}{2}x.$$

Partie 2

1) D'après l'étude des variations de la fonction f , la différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est

$$f(20) - f(e^2 - 1) = (21 \ln(21) - 53) - (10 - e^2) = 21 \ln(21) + e^2 - 63 = 8,3\dots$$

La proposition P_1 est donc exacte.

D'après la question 3) de la partie, l'inclinaison de la piste en B est $|f'(0)| = 2$. Le double de l'inclinaison de la piste en C est

$$2|f'(20)| = 2(\ln(21) - 2) = 2,08\dots$$

La proposition P_2 est donc vraie.

2) Deux fois l'aire de la face latérale $ODBC$ exprimée en m^2 est

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{20} f(x) dx &= 2[F(x)]_0^{20} = 2(F(20) - F(0)) = 2F(20) \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} 21^2 \ln(21) - \frac{7}{4} \times 20^2 + \frac{13}{2} \times 20 \right) = 441 \ln(21) - 1140 \end{aligned}$$

puis l'aire de la face latérale $OAB'B$ exprimée en m^2 est

$$10 \times f(0) = 70,$$

et l'aire de la face latérale $CD'C'C$ exprimée en m^2 est

$$10 \times f(20) = 210 \ln(21) - 530.$$

L'aire totale à peindre en rouge exprimée en m^2 est

$$441 \ln(21) - 1140 + 70 + 210 \ln(21) - 530 = 651 \ln(21) - 1600.$$

La quantité de peinture nécessaire est

$$\frac{651 \ln(21) - 1600}{5} = 76,3 \dots$$

Le nombre minimum de litres de peinture rouge nécessaire est 77 litres à 1 litre près.

3) a) Pour $0 \leq k \leq 19$,

$$\begin{aligned} B_k B_{k+1} &= \sqrt{(x_{B_{k+1}} - x_{B_k})^2 + (y_{B_{k+1}} - y_{B_k})^2} = \sqrt{(k+1-k)^2 + (f(k+1) - f(k))^2} \\ &= \sqrt{1 + (f(k+1) - f(k))^2}. \end{aligned}$$

b) Algorithme complété.

Variables	S : réel K : entier
Fonction	f : définie par $f(x) = (x+1) \ln(x+1) - 3x + 7$
Traitement	S prend pour valeur 0 Pour K variant de 0 à 19 S prend pour valeur $S + 10\sqrt{1 + (f(K+1) - f(K))^2}$ Fin Pour
Sortie	Afficher S