

EXERCICE 3 : corrigé

1) Le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 64 = 64 - 4 \times 64 = -3 \times 64 < 0$.
L'équation (E) admet donc deux solutions complexes non réelles conjuguées

$$z_1 = \frac{-(-8) + i\sqrt{3 \times 64}}{2} = \frac{8 + 8i\sqrt{3}}{2} = 4 + 4i\sqrt{3}$$

et $z_2 = \overline{z_1} = 4 - 4i\sqrt{3}$.

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est $\{4 + 4i\sqrt{3}, 4 - 4i\sqrt{3}\}$.

2) a) $|a| = |4(1 + i\sqrt{3})| = 4|1 + i\sqrt{3}| = 4\sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{1 + 3} = 4\sqrt{4} = 4 \times 2 = 8$ puis

$$a = 8 \left(\frac{4}{8} + i \frac{4\sqrt{3}}{8} \right) = 8 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 8 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right).$$

$|a| = 8$ et un argument de a est $\frac{\pi}{3}$.

b) Par suite, $a = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b = \overline{a} = 8e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

$$a = 8e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ et } b = 8e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

c) On a déjà $|a| = 8$ et $|b| = 8$. Enfin, $|c| = |8i| = 8|i| = 8$. Donc,

les points A , B et C sont sur le cercle de centre O et de rayon 8.

d) Voir figure page suivante.

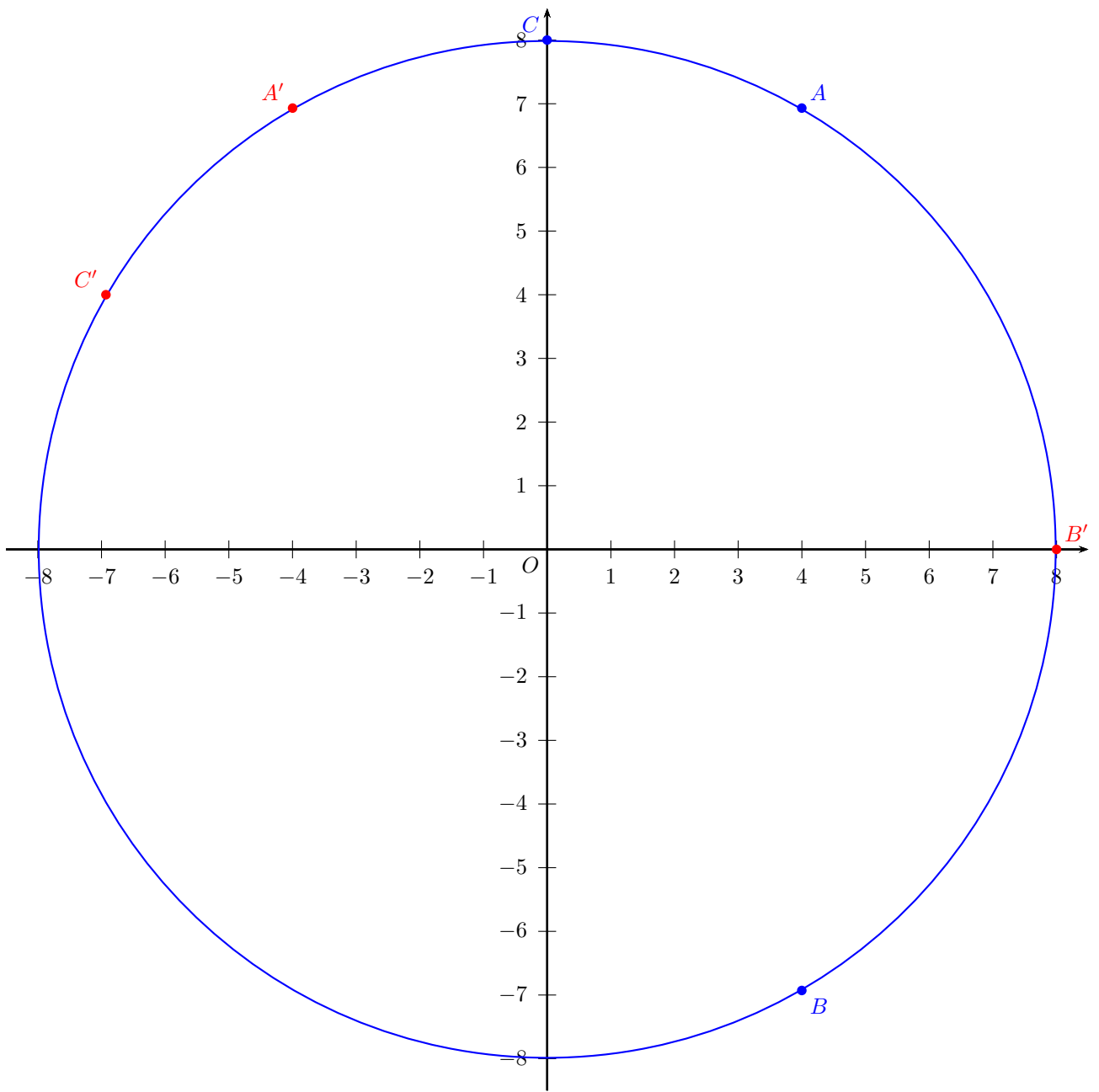
3) a) $b' = be^{i\frac{\pi}{3}} = 8e^{-i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = 8e^{i(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3})} = 8e^0 = 8$.

$$b' = 8.$$

b) $a' = 8e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = 8e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3})} = 8e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

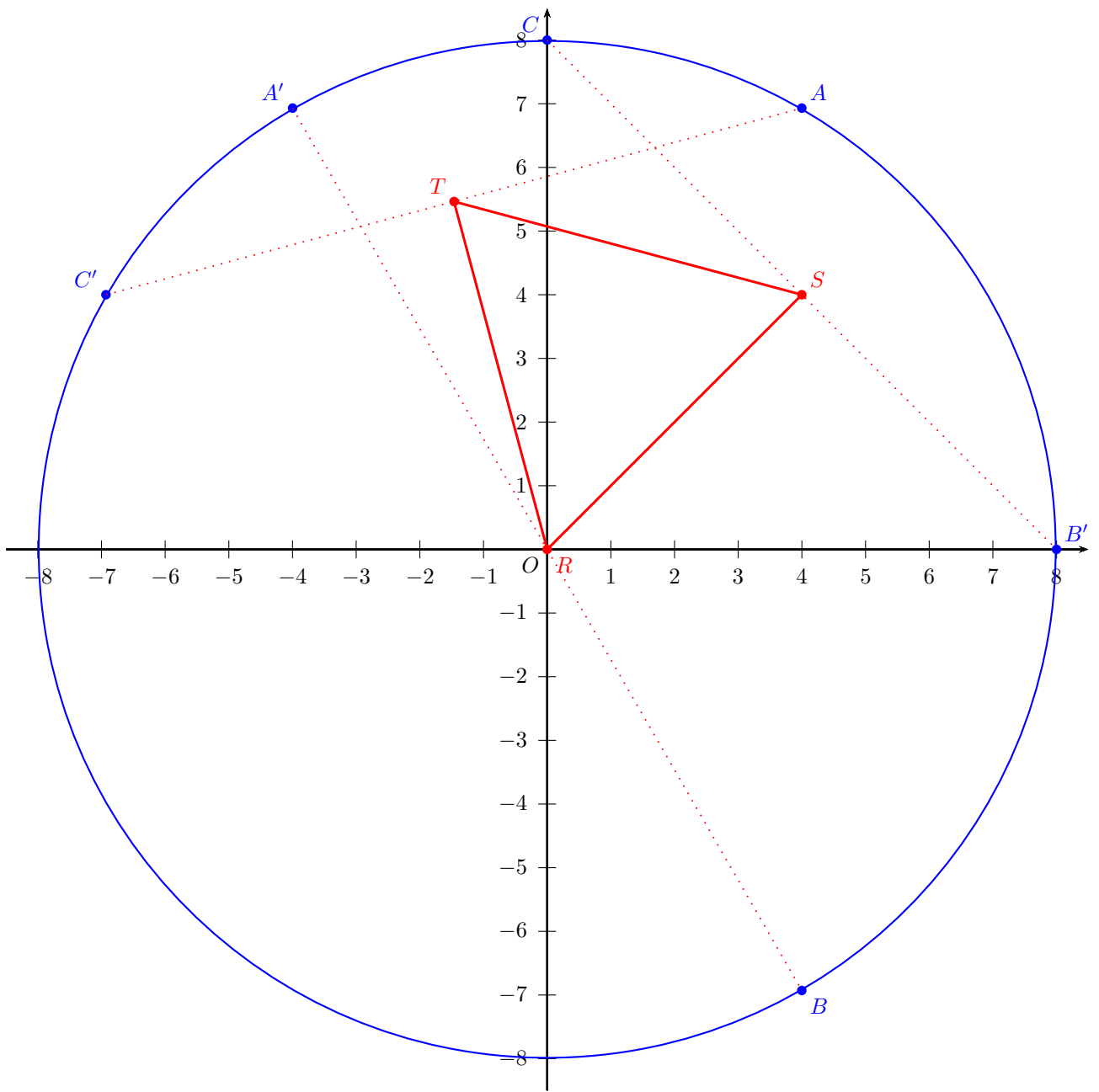
$|a'| = 8$ et un argument de a' est $\frac{2\pi}{3}$.

Figure.



4) a) $r = \frac{a' + b}{2} = \frac{-4 + 4i\sqrt{3} + 4 - 4i\sqrt{3}}{2} = 0$. $s = \frac{b' + c}{2} = \frac{8 + 8i}{2} = 4 + 4i$.

b) Figure.



Il semble que le triangle RST soit équilatéral.