

France métropolitaine/Réunion 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (3 points)

Dans un repère orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points $A(0 ; -1 ; 5)$, $B(2 ; -1 ; 5)$, $C(11 ; 0 ; 1)$, $D(11 ; 4 ; 4)$.

Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde.

Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde.

A l'instant $t = 0$, le point M est en A et le point N est en C .

On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes, t désignant un nombre réel positif.

On admet que M_t et N_t , ont pour coordonnées :

$M_t(t ; -1 ; 5)$ et $N_t(11 ; 0, 8t ; 1 + 0, 6t)$.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

- 1) a) La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI) , (OJ) ou (OK) . Lequel ?
b) La droite (CD) se trouve dans un plan \mathcal{P} parallèle à l'un des plans (OIJ) , (OIK) ou (OJK) .
Lequel ? On donnera une équation de ce plan \mathcal{P} .
c) Vérifier que la droite (AB) , orthogonale au plan \mathcal{P} , coupe ce plan au point $E(11 ; -1 ; 5)$.
d) Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?
- 2) a) Montrer que $M_t N_t^2 = 2t^2 - 25, 2t + 138$.
b) A quel instant t la longueur $M_t N_t$ est-elle minimale ?

EXERCICE 2 : corrigé

1) a) Le vecteur \overrightarrow{AB} a pour coordonnées $(2 - 0, (-1) - (-1), 5 - 5)$ ou encore $(2, 0, 0)$. On en déduit que $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{OI}$ puis que le vecteur \overrightarrow{AB} est colinéaire au vecteur \overrightarrow{OI} et donc que

la droite (AB) est parallèle à la droite (OI) .

b) Les points C et D appartiennent au plan \mathcal{P} d'équation $x = 11$ et donc la droite (CD) est contenue dans ce plan. D'autre part, le plan \mathcal{P} d'équation $x = 11$ est parallèle au plan (OJK) .

La droite (CD) est dans le plan $\mathcal{P} : x = 11$, plan qui est parallèle à (OJK) .

c) Un vecteur normal au plan \mathcal{P} d'équation $x - 11 = 0$ est le vecteur $\vec{n}(1, 0, 0)$ c'est-à-dire $\vec{n} = \overrightarrow{OI}$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}(2, 0, 0)$ est colinéaire au vecteur \vec{n} et donc la droite (AB) est perpendiculaire au plan \mathcal{P} .

La droite (AB) est la droite passant par $A(0, -1, 5)$ et de vecteur directeur $\vec{n}(1, 0, 0)$. Un système d'équations paramétriques de (AB) est

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = 5 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$
 Pour $t \in \mathbb{R}$, le point $M_t(t, -1, 5)$ appartient au plan \mathcal{P} si et seulement si $t = 11$. Pour $t = 11$, on obtient le point $E(11, -1, 5)$.

La droite (AB) est perpendiculaire au plan \mathcal{P} au point $E(11, -1, 5)$.

d) La droite (CD) est contenue dans le plan \mathcal{P} et la droite (AB) est perpendiculaire au plan \mathcal{P} . Donc les droites (AB) et (CD) sont orthogonales et en particulier, les droites (AB) et (CD) sont sécantes ou non coplanaires.

Si les droites (AB) et (CD) sont sécantes en un point, ce point est nécessairement un point de la droite (AB) qui est dans \mathcal{P} c'est-à-dire le point E . Donc, les droites (AB) et (CD) sont sécantes si et seulement si le point E appartient la droite (CD) .

Les coordonnées du vecteur \overrightarrow{CD} sont $(0, 4, 3)$ et les coordonnées du vecteur \overrightarrow{CE} sont $(0, -1, 4)$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires et donc le point E n'appartient pas à la droite (CD) . Finalement,

les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

2) a) Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} M_t N_t^2 &= (11 - t)^2 + (0, 8t + 1)^2 + (0, 6t - 4)^2 = t^2 - 22t + 121 + 0, 64t^2 + 1, 6t + 1 + 0, 36t^2 - 4, 8t + 16 \\ &= 2t^2 - 25, 2t + 138. \end{aligned}$$

b) Pour $t \in \mathbb{R}$, posons $f(t) = 2t^2 - 25, 2t + 138$. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel t , $f'(t) = 4t - 25, 2$.

La fonction f' est négative sur $\left] -\infty, \frac{25, 2}{4} \right]$ et positive sur $\left[\frac{25, 2}{4}, +\infty \right[$.

Par suite, la fonction f admet un minimum en $t_0 = 6, 3$. Puisque la distance $M_t N_t$ est minimale si et seulement si $M_t N_t^2 = f(t)$ est minimal, la distance $M_t N_t$ est minimale à l'instant $t_0 = 6, 3$ s.