

France métropolitaine/Réunion 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (6 points) (commun à tous les candidats)

Partie 1

1) Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ , où λ est un réel strictement positif donné.

On rappelle que la densité de probabilité de cette loi est la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}.$$

a) Soit c et d deux réels tels que $0 \leq c < d$.

Démontrer que la probabilité $P(c \leq X \leq d)$ vérifie

$$P(c \leq X \leq d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}.$$

b) Déterminer une valeur de λ à 10^{-3} près de telle sorte que la probabilité $P(X > 20)$ soit égale à 0,05.

c) Donner l'espérance de la variable aléatoire X .

Dans la suite de l'exercice on prend $\lambda = 0,15$.

d) Calculer $P(10 \leq X \leq 20)$.

e) Calculer la probabilité de l'événement $(X > 18)$.

2) Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 16 et d'écart type 1,95.

a) Calculer la probabilité de l'événement $(20 \leq Y \leq 21)$.

b) Calculer la probabilité de l'événement $(Y < 11) \cup (Y > 21)$.

Partie 2

Une chaîne de magasins souhaite fidéliser ses clients en offrant des bons d'achat à ses clients privilégiés. Chacun d'eux reçoit un bon d'achat de couleur verte ou rouge sur lequel est inscrit un montant.

Les bons d'achats sont distribués de façon à avoir, dans chaque magasin, un quart de bons rouges et trois quarts de bons verts.

Les bons d'achat verts prennent la valeur de 30 euros avec une probabilité égale à 0,067 ou des valeurs comprises entre 0 et 15 euros avec des probabilités non précisées ici.

De façon analogue, les bons d'achat rouges prennent les valeurs 30 ou 100 euros avec des probabilités respectivement égales à 0,015 et 0,010 ou des valeurs comprises entre 10 et 20 euros avec des probabilités non précisées ici.

1) Calculer la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros sachant qu'il est rouge.

2) Montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros vaut 0,057.

Pour la question suivante, on utilise cette valeur.

3) Dans un des magasins de cette chaîne, sur 200 clients privilégiés, 6 ont reçu un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros.

Le directeur du magasin considéré estime que ce nombre est insuffisant et doute de la répartition au hasard des bons d'achats dans les différents magasins de la chaîne.

Ses doutes sont-ils justifiés ?