France métropolitaine/Réunion 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (6 points) (commun à tous les candidats)

Partie 1

1) Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif donné.
On rappelle que la densité de probabilité de cette loi est la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}.$$

a) Soit c et d deux réels tels que $0 \leqslant c < d$.
Démontrer que la probabilité $P(c \leqslant X \leqslant d)$ vérifie

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}.$$

b) Déterminer une valeur de λ à 10^{-3} près de telle sorte que la probabilité $P(X > 20)$ soit égale à 0,05.

c) Donner l'espérance de la variable aléatoire X.

Dans la suite de l'exercice on prend $\lambda = 0,15$.

d) Calculer $P(10 \leqslant X \leqslant 20)$.

e) Calculer la probabilité de l'événement $(X > 18)$.

2) Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 16 et d'écart type $1,95$.

a) Calculer la probabilité de l'événement $(20 \leqslant Y \leqslant 21)$.

b) Calculer la probabilité de l'événement $(Y < 11) \cup (Y > 21)$.

Partie 2

Une chaîne de magasins souhaite fidéliser ses clients en offrant des bons d'achat à ses clients privilégiés. Chacun d'eux reçoit un bon d'achat de couleur verte ou rouge sur lequel est inscrit un montant.

Les bons d'achats sont distribués de façon à avoir, dans chaque magasin, un quart de bons rouges et trois quarts de bons verts.

Les bons d'achat verts prennent la valeur de 30 euros avec une probabilité égale à $0,067$ ou des valeurs comprises entre 0 et 15 euros avec des probabilités non précisées ici.

De façon analogue, les bons d'achat rouges prennent les valeurs 30 ou 100 euros avec des probabilités respectivement égales à $0,015$ et $0,010$ ou des valeurs comprises entre 10 et 20 euros avec des probabilités non précisées ici.

1) Calculer la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros sachant qu'il est rouge.

2) Montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros vaut $0,057$.

Pour la question suivante, on utilise cette valeur.

3) Dans un des magasins de cette chaîne, sur 200 clients privilégiés, 6 ont reçu un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros.

Le directeur du magasin considéré estime que ce nombre est insuffisant et doute de la répartition au hasard des bons d'achats dans les différents magasins de la chaîne.

Ses doutes sont-ils justifiés ?

France métropolitaine/Réunion 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie 1

1) a) Soient c et d deux réels tels que $0 \leqslant c < d$.

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(x)\,dx = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_c^d = \left(-e^{-\lambda d}\right) - \left(-e^{-\lambda c}\right) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}.$$

b) D'après la question précédente,

$$P(X > 20) = 1 - P(0 \leqslant X \leqslant 20) = 1 - \left(e^0 - e^{-20\lambda}\right) = 1 - \left(1 - e^{-20\lambda}\right) = e^{-20\lambda}.$$

Par suite,

$$P(X > 20) = 0,05 \Leftrightarrow e^{-20\lambda} = 0,05 \Leftrightarrow -20\lambda = \ln(0,05) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln(0,05)}{20}$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 0,15 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

c) On sait que l'espérance de la loi exponentielle de paramètre λ est $\dfrac{1}{\lambda}$. Donc, l'espérance de X est

$$E(X) = \frac{1}{-\ln(0,05)/20} = -\frac{20}{\ln(0,05)} = 6,676 \text{ arrondi à } 10^{-3}.$$

d) D'après la question a), $P(10 \leqslant X \leqslant 20) = e^{-0,15\times 10} - e^{-0,15\times 20} = e^{-1,5} - e^{-3} = 0,173$ arrondi à 10^{-3}.

e) $P(X > 18) = 1 - P(0 \leqslant X \leqslant 18) = 1 - \left(1 - e^{-0,15\times 18}\right) = e^{-2,7} = 0,067$ arrondi à 10^{-3}.

2) a) La calculatrice donne $P(20 \leqslant X \leqslant 21) = 0,015$ arrondi à 10^{-3}.

b) La calculatrice donne $P((Y < 11) \cup (Y > 21)) = 1 - P(11 \leqslant Y \leqslant 21) = 0,010$ arrondi à 10^{-3}.

Partie 2

1) La probabilité demandée est $0,015 + 0,010 = 0,025$

2) En notant R l'événement « le bon est rouge », V l'événement « le bon est vert » et enfin M l'événement « le montant du bon d'achat est supérieur ou égal à 30 euros », la formule des probabilités totales fournit

$$\begin{aligned} P(M) &= P(R) \times P_R(M) + P(V) \times P_V(M) \\ &= \frac{1}{4} \times 0,025 + \frac{3}{4} \times 0,067 = \frac{1}{4}(0,025 + 3 \times 0,067) = 0,0565 \\ &= 0,057 \text{ arraondi à } 10^{-3}. \end{aligned}$$

3) Déterminons l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% correspondant à la situation. Ici, $n = 200$ et $p = 0,057$. On note que $n \geqslant 30$, $np = 11,4 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 188,6 \geqslant 5$.

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% est

$$\left[0,057 - 1,96\frac{\sqrt{0,057(1-0,057)}}{\sqrt{200}}, 0,057 + 1,96\frac{\sqrt{0,057(1-0,057)}}{\sqrt{200}}\right] = [0,024; 0,090].$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La fréquence observée est $f = \dfrac{6}{200} = 0,03$. f appartient à l'intervalle de fluctuation et donc les doutes du directeur ne sont pas justifiés.

