Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique.
Mathématiques. Option A

Partie I. Premiers exemples

1) a)

i) On sait que pour tout x de $\mathbb{R}^3$, $p_x(a) = \dfrac{\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle}a$. Redémontrons-le.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $x - \lambda a \in a^\perp \Leftrightarrow \langle (x - \lambda a), a\rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle}$ ce qui démontre le résultat.

ii) Le théorème spectral pour une matrice : toute matrice symétrique réelle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale. Le théorème spectral pour les endomorphismes : tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien diagonalise dans une base orthonormée.

La matrice H est symétrique réelle. Puisque la base canonique est orthonormée, on en déduit que h est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien $\left(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle\right)$. Soit alors $(x, y) \in \mathrm{Ker}(f) \times E$.

$$\langle x, h(y)\rangle = \langle h(x), y\rangle = \langle 0, y\rangle = 0.$$

Ceci montre que $\mathrm{Ker}(h) \subset (\mathrm{Im}(h))^\perp$. D'autre part, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(h)) = 3 - \dim(\mathrm{Im}(h)) = \dim\left((\mathrm{Im}(h))^\perp\right)$. Par suite, $\mathrm{Ker}(h) = (\mathrm{Im}(h))^\perp$ et finalement

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(h) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}(h).$$

iii) Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_3$.

$$x \in \mathrm{Ker}(h) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 2x_2 - 3x_3 \\ -2\,(2x_2 - 3x_3) + 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3\,(2x_2 - 3x_3) - 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_2 = 2x_3 \\ x_1 = x_3 \end{array}\right.$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(h) = \mathrm{Vect}(a)$ où $a = (1, 2, 1)$. Puisque $(\mathrm{Im}(h))^\perp = \mathrm{Ker}(h)$, pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{Im}(h)}(x) &= x - p_a(x) = x - \frac{\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle}a \\ &= (x_1, x_2, x_3) - \frac{x_1 + 2x_2 + x_3}{6}(1, 2, 1) \\ &= \frac{1}{6}\,(5x_1 - 2x_2 - x_3, -2x_1 + 2x_2 - 2x_3, -x_1 - 2x_2 + 5x_3) \end{aligned}$$

et donc la matrice demandée est $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

b)

i) $\mathrm{Tr}(h \circ h) = \mathrm{Tr}\left(H^2\right) = \mathrm{Tr}\left({}^tHH\right) = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant 3} h_{i,j}^2 = 1^2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 3^2 + 2 \times 4^2 + 5^2 = 93.$

ii) H a trois valeurs propres réelles λ_1, λ_2 et $\lambda_3 = 0$.

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{Tr}(H) = 9 \\ \mathrm{Tr}\left(H^2\right) = 93 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = 9 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 93 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = 9 \\ (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 2\lambda_1\lambda_2 = 93 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = 9 \\ \lambda_1\lambda_2 = -6 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ sont les solutions de } X^2 - 9X - 6 = 0.$$

Donc, $\mathrm{Sp}(H) = \left(\dfrac{9+\sqrt{105}}{2}, \dfrac{9-\sqrt{105}}{2}, 0\right)$ (il paraissait plus simple de calculer χ_H directement).

2) a) $H_\varphi^{(n)} = \left((-1)^{i+j-2}(i+j-1)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $H_\tau^{(n)} = (i+j-1)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Soit $P = \mathrm{diag}\left((-1)^i\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$. P est inversible et $P^{-1} = P$ puis

$$\begin{aligned}P^{-1}H_\tau^{(n)}P &= P^{-1}\,(i+j-1)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\,P = P^{-1}\left((-1)^{j-1}(i+j-1)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \left((-1)^{i+j-2}(i+j-1)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\\ &= H_\varphi^{(n)}.\end{aligned}$$

Donc, $H_\varphi^{(n)}$ et $H_\tau^{(n)}$ sont semblables.

b)

i) Soit $j \in [\![1,n]\!]$. La j-ème colonne de $H_\tau^{(n)}$ s'écrit

$$C_j = (i+j-1)_{1\leqslant i\leqslant n} = (j-1)(1)_{1\leqslant i\leqslant n} + (i)_{1\leqslant i\leqslant n}.$$

Posons alors $C_1' = \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ et $C_2' = \begin{pmatrix}1\\2\\\vdots\\n\end{pmatrix}$. Ce qui précède montre déjà que $\mathrm{Im}\left(H_\tau^{(n)}\right) \subset \mathrm{Vect}\,(C_1', C_2')$ ou encore que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2)$.
Inversement, $C_1' = C_2 - C_1 \in \mathrm{Im}\left(H_\tau^{(n)}\right)$ et $C_2' = C_1 \in \mathrm{Im}\left(H_\tau^{(n)}\right)$. Donc, $\mathrm{Vect}\,(C_1', C_2') \subset \mathrm{Im}\left(H_\tau^{(n)}\right)$ et finalement $\mathrm{Im}\left(H_\tau^{(n)}\right) = \mathrm{Vect}\,(F_1, F_2)$ ou encore $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}\,(f_1, f_2)$.

ii) Pour tout x de E, $g(g(x)) \in \mathrm{Im}(g)$ et donc $g(\mathrm{Im}(g)) \subset \mathrm{Im}(g)$. Notons g_F l'endomorphisme de F induit par g.

$$\begin{aligned}g_F(f_1) &= \sum_{k=1}^{n} g(e_k) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(i+k-1)e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}(i+k-1)\right)e_i\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}(k-1)\right)e_i + ie_i\right) = \frac{n(n-1)}{2}\sum_{i=1}^{n}e_i + n\sum_{i=1}^{n}ie_i\\ &= \frac{n(n-1)}{2}f_1 + nf_2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}g_F(f_2) &= \sum_{k=1}^{n} kg(e_k) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}k(i+k-1)e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}k(i+k-1)\right)e_i\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)\right)e_i + kie_i\right) = \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right)\sum_{i=1}^{n}e_i + \frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{n}ie_i\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1-3)}{6}f_1 + \frac{n(n+1)}{2}f_2 = \frac{n\left(n^2-1\right)}{3}f_1 + \frac{n(n+1)}{2}f_2.\end{aligned}$$

Donc, $\mathrm{Mat}_{(f_1,f_2)}(\widetilde{g}) = \begin{pmatrix}\dfrac{n(n-1)}{2} & \dfrac{n\left(n^2-1\right)}{3}\\ n & \dfrac{n(n+1)}{2}\end{pmatrix}$.

c) Puisque $H_\varphi^{(n)}$ est semblable à $H_\tau^{(n)}$, le spectre de $H_\varphi^{(n)}$ est le spectre de $H_\tau^{(n)}$. Puisque $\dim\left(\mathrm{Im}\left(H_\tau^{(n)}\right)\right) = 2$, $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(H_\tau^{(n)}\right)\right) = n-2$ et puisque $H_\tau^{(n)}$ est diagonalisable (car symétrique réelle), 0 est valeur propre d'ordre $n-2$ de $H_\tau^{(n)}$. Il manque encore deux valeurs propres. Puisque F est stable par g, on sait que $\chi_{\widetilde{g}} = \chi_G$ divise $\chi_g = \chi_{H_\tau^{(n)}}$ avec

$$\chi_G = X^2 - (\mathrm{Tr}(G))X + \det(G) = X^2 - n^2X - \frac{n^2\left(n^2-1\right)}{12}.$$

Les deux valeurs propres manquantes sont donc $\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(n^2 + \sqrt{n^4 + \frac{n^2(n^2-1)}{3}}\right) = \frac{1}{2}\left(n^2 + n\sqrt{\frac{4n^2-1}{3}}\right)$ et $\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(n^2 - n\sqrt{\frac{4n^2-1}{3}}\right)$. Finalement,

$$\mathrm{Sp}\left(H_\varphi^{(n)}\right) = \left(\frac{1}{2}\left(n^2 + n\sqrt{\frac{4n^2-1}{3}}\right), \frac{1}{2}\left(n^2 - n\sqrt{\frac{4n^2-1}{3}}\right), 0, \ldots, 0\right).$$

3) a)

i) La fonction $t \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n} c_i t^{i-1}\right)^2 e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et négligeable en $+\infty$ devant $\frac{1}{t^2}$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc la fonction $t \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n} c_i t^{i-1}\right)^2 e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i t^{i-1}\right)^2 e^{-t}\, dt$ est une intégrale convergente.

ii) Toutes les intégrales considérées ci-dessous étant convergentes, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i t^{i-1}\right)^2 e^{-t}\, dt &= \int_0^{+\infty} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} c_i c_j t^{i+j-2} e^{-t}\, dt \\
&= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} c_i c_j \int_0^{+\infty} t^{i+j-2} e^{-t}\, dt \\
&= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} c_i c_j \Gamma(i+j-1) \text{ (où } \forall x > 0,\ \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt) \\
&= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} c_i (i+j-2)! c_j \text{ (d'après le cours)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\sum_{j=1}^{n} (i+j-2)! c_j\right) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} (1+j-2)! c_j \\ \sum_{j=1}^{n} (2+j-2)! c_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} (n+j-2)! c_j \end{pmatrix} \\
&= {}^t C\left(H_\varphi^{(n)} C\right) = {}^t C H_\varphi^{(n)} C.
\end{aligned}$$

b) $\chi_{H_\varphi^{(n)}}$ est scindé sur $\mathbb{R}$. Soit alors $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de $H_\varphi^{(n)}$ puis C un vecteur propre associé.

$$\lambda\, {}^t CC = {}^t C(\lambda C) = {}^t C H_\varphi^{(n)} C = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i t^{i-1}\right)^2 e^{-t}\, dt.$$

Puisque $C \neq 0$, on a encore ${}^t CC = \|C\|_2^2 > 0$ puis

$$\lambda = \frac{1}{{}^t CC} \int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i t^{i-1}\right)^2 e^{-t}\, dt \geqslant 0.$$

Enfin, l'un au moins des c_i n'est pas nul et donc le polynôme $t \mapsto \sum_{i=1}^{n} c_i t^{i-1}$ admet un nombre fini de racines. Puisque $[0, 1]$ est infini, la fonction $t \mapsto \left(\sum_{i=1}^{n} c_i t^{i-1}\right)^2 e^{-t}$ est une fonction non nulle sur $[0, 1]$, continue et positive sur $[0, 1]$. On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i t^{i-1}\right)^2 e^{-t}\,dt > 0$ puis que $\lambda > 0$.

On a montré que $\mathrm{Sp}\left(H_{\varphi}^{(n)}\right) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

4) Soit $C = (c_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{C}_n$.

$$\begin{aligned}
{}^tCH_{\varphi}^{(n)}C &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{c_ic_j}{i+j-1} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} c_ic_j \int_0^1 t^{i+j-2}\,dt \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} c_ic_jt^{i+j-2}\right) dt = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} c_it^{i-1}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} c_jt^{j-1}\right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} c_it^{i-1}\right)^2 dt.
\end{aligned}$$

Si maintenant λ est une valeur propre de $H_{\varphi}^{(n)}$ et C un vecteur propre associé (donc ${}^tCC > 0$), comme à la question précédente,

$$\lambda = \frac{1}{{}^tCC}\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} c_it^{i-1}\right)^2 dt > 0 \text{ (intégrale d'une fonction continue, positive, non nulle).}$$

De nouveau, $\mathrm{Sp}\left(H_{\varphi}^{(n)}\right) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

Partie II. Les formes bilinéaires Δ_n

1) a) Pour $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, posons pour tout $(A,B) \in E_n^2$, $f_{i,j}(A,B) = a_ib_j$. Chaque $f_{i,j}$ est une forme bilinéaire sur $E_n \times E_n$ (on dit plutôt sur E_n).
Soit f une forme bilinéaire sur $E_n \times E_n$. Pour tout $(A,B) \in E_n^2$

$$f(A,B) = f\left(\sum_{i=0}^{n} a_iX^i, \sum_{j=0}^{n} b_jX^j\right) = \sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} a_ib_jf\left(X^i,X^j\right)$$

ou encore $f = \displaystyle\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} \alpha_{i,j}f_{i,j}$ où pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, $\alpha_{i,j} = f\left(X^i,X^j\right)$. Ainsi, $(f_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ engendre l'espace des formes bilinéaires sur $E_n \times E_n$. De plus, pour $(\alpha_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ donné,

$$\begin{aligned}
\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} \alpha_{i,j}f_{i,j} = 0 &\Rightarrow \forall (k,l) \in [\![0,n]\!]^2,\ \sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} \alpha_{i,j}f_{i,j}\left(X^k,X^l\right) = 0 \Rightarrow \forall (k,l) \in [\![0,n]\!]^2,\ \sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} \alpha_{i,j}\delta_{i,k}\delta_{j,l} = 0 \\
&\Rightarrow \forall (k,l) \in [\![0,n]\!]^2,\ \alpha_{k,l} = 0.
\end{aligned}$$

Donc, la famille $(f_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ est libre et finalement la famille $(f_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de l'espace des formes bilinéaires sur $E_n \times E_n$. Cet espace est donc de dimension $(n+1)^2$.

Soit alors $f = \displaystyle\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} \alpha_{i,j}f_{i,j}$ une forme bilinéaire sur $E_n \times E_n$.

$$\begin{aligned}
f \text{ symétrique} &\Leftrightarrow \forall (A,B) \in (E_n)^2,\ f(A,B) = f(B,A) \Leftrightarrow \forall (A,B) \in (E_n)^2,\ \sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} \alpha_{i,j}a_ib_j = \sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} \alpha_{i,j}b_ia_j \\
&\Leftrightarrow \sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} \alpha_{i,j}f_{i,j} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \alpha_{j,i}f_{i,j} \\
&\Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2,\ \alpha_{i,j} = \alpha_{j,i} \text{ (car } (f_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant n} \text{ est libre.)} \\
&\Leftrightarrow \forall i \neq j,\ \alpha_{i,j} = \alpha_{j,i}.
\end{aligned}$$

L'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur $E_n \times E_n$ est $\mathrm{Vect}\left((f_{i,i})_{0\leqslant i\leqslant n} \cup (f_{i,j}+f_{j,i})_{0\leqslant i<j\leqslant n}\right)$. C'est un espace vectoriel de dimension $\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$.

b) Pour $(A,B)\in E_n^2$,

$$\Delta_n(A,B)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}a_ib_j\varphi(i+j)=\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n}b_ja_i\varphi(j+i)=\Delta_n(B,A).$$

Donc, Δ_n est une forme symétrique sur $E_n\times E_n$.

Soient $(A,B,C)\in E_n^3$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\Delta_n(\lambda A+\mu B,C)&=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(\lambda a_i+\mu b_i)\,c_j\varphi(i+j)=\lambda\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}a_ic_j\varphi(i+j)+\mu\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}b_ic_j\varphi(i+j)\\&=\lambda\Delta_n(A,C)+\mu\Delta_n(B,C).\end{aligned}$$

Donc, Δ_n est linéaire par rapport à sa première variable puis bilinéaire par symétrie. Finalement, Δ_n est une forme bilinéaire symétrique sur $E_n\times E_n$.

c) On pose $A=\sum_{i=0}^{+\infty}a_iX^i$ et $B=\sum_{j=0}^{+\infty}b_jX^j$ où les a_i sont nuls si $i\geqslant n+1$ et les b_j sont nuls si $j\geqslant n+1$. Toutes les sommes considérées ci-dessous sont finies et

$$\begin{aligned}\Delta_n(A,B)&=\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}a_ib_j\varphi(i+j)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i+j=k}a_ib_j\varphi(i+j)\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i+j=k}a_ib_j\right)\varphi(k)\\&=\delta_n\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i+j=k}a_ib_j\right)X^k\right)=\delta_n\left(\left(\sum_{i=0}^{+\infty}a_iX^i\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty}b_jX^j\right)\right)\\&=\delta_n(AB).\end{aligned}$$

d) Soit Δ une forme bilinéaire sur $E_n\times E_n$. S'il existe une forme linéaire δ telle que pour $(A,B)\in E_n^2$, $\Delta(A,B)=\delta(AB)$, alors en particulier, pour $(A,B)\in E_n^2$,

$$\Delta(A,B)=\delta(AB)=\delta(BA)=\Delta(B,A).$$

Δ est donc nécessairement une forme bilinéaire symétrique. De plus, il est nécessaire que pour tout $k\in[\![0,2n]\!]$ puis pour tout $(i,j)\in[\![0,n]\!]^2$ tel que $i+j=k$, $\Delta\left(X^i,X^j\right)=\delta\left(X^k\right)$. Ainsi, si pour $k\in[\![0,2n]\!]$, on pose $\alpha_k=\delta\left(X^k\right)$, on a nécessairement pour tout $(A,B)\in E_n^2$,

$$\begin{aligned}\Delta(A,B)=&\ \alpha_0a_0b_0+\alpha_1\left(a_0b_1+a_1b_0\right)+\ldots+\alpha_{n-1}\left(a_0b_{n-1}+\ldots+a_{n-1}b_0\right)+\alpha_n\left(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_{n-1}b_1+a_nb_0\right)\\&+\alpha_{n+1}\left(a_1b_n+\ldots+a_nb_1\right)+\ldots+\alpha_{2n-1}\left(a_{n-1}b_n+a_nb_{n-1}\right)+\alpha_{2n}a_nb_n\end{aligned}$$

Inversement, si Δ est de la forme ci-dessus et si pour $Q=\sum_{k=0}^{2n}c_kX^k\in E_{2n}$, on pose $\delta(Q)=\sum_{k=0}^{2n}\alpha_kc_k$, alors δ est une forme linéaire sur E_{2n} telle que pour $(A,B)\in E_n^2$,

$$\begin{aligned}\delta(AB)&=\delta\left(a_0b_0+\left(a_1b_0+a_0b_1\right)X+\ldots+\left(a_0b_n+\ldots+a_nb_0\right)X^n+\ldots+\left(a_{n-1}b_n+a_nb_{n-1}\right)X^{2n-1}+a_nb_nX^{2n}\right)\\&=\alpha_0a_0b_0+\alpha_1\left(a_0b_1+a_1b_0\right)+\ldots+\alpha_{n-1}\left(a_0b_{n-1}+\ldots+a_{n-1}b_0\right)+\alpha_n\left(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_{n-1}b_1+a_nb_0\right)\\&\quad+\alpha_{n+1}\left(a_1b_n+\ldots+a_nb_1\right)+\ldots+\alpha_{2n-1}\left(a_{n-1}b_n+a_nb_{n-1}\right)+\alpha_{2n}a_nb_n\\&=\Delta(A,B).\end{aligned}$$

Avec les notations de la question a), l'ensemble cherché est $\mathrm{Vect}\left(f_{0,0},f_{1,0}+f_{0,1},\ldots,f_{0,n}+\ldots+f_{n,0},\ldots,f_{n-1,n}+f_{n,n-1},f_{n,n}\right)$. De plus, la famille ci-dessus est libre car si $\left(\alpha_k\right)_{0\leqslant k\leqslant 2n}$ est tel que $\alpha_0f_{0,0}+\alpha_1\left(f_{0,1}+f_{1,0}\right)+\ldots+\alpha_{n-1}\left(f_{0,n-1}+\ldots+f_{n-1,0}\right)+\alpha_n\left(f_{0,n}+\ldots+f_{n,0}\right)+\ldots+\alpha_{2n-1}\left(f_{n-1,n}+f_{n,n-1}\right)+\alpha_{2n}f_{n,n}=0$, alors en évaluant en $\left(X^i,X^j\right)$, $(i,j)\in[\![0,n]\!]^2$, on obtient $\alpha_k=0$ où $k=i+j$. La famille $\left(f_{0,0},f_{1,0}+f_{0,1},\ldots,f_{0,n}+\ldots+f_{n,0},\ldots,f_{n-1,n}+f_{n,n-1},f_{n,n}\right)$ est donc une base du sous-espace vectoriel cherché.

Sa dimension est $2n+1$.

2) a) Soit $Q = \sum_{k=0}^{2n} c_k X^k$. Par linéarité de l'espérance,

$$E(Q(Y)) = \sum_{k=0}^{2n} c_k E\left(Y^k\right) = \sum_{k=0}^{2n} c_k \varphi(k) = \delta_n(Q).$$

b) Pour $A = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in E_n$, par positivité de l'espérance, en posant $Q = A^2$,

$$\Delta_n(A, A) = \delta_n\left(A^2\right) = E\left(Q(Y)\right) = E\left(\left(\sum_{i=0}^{n} Y^i\right)^2\right) \geqslant 0.$$

Donc, Δ_n est une forme bilinéaire symétrique positive sur $E_n \times E_n$. Ensuite, d'après la formule de transfert,

$$E(Q(Y)) = \sum_{i=1}^{d} p_i Q(y_i)$$

et donc, puisque les p_i sont strictement positives et que Q est une fonction positive sur $\mathbb{R}$,

$$\Delta_n(A, A) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, d]\!],\ Q\left(y_i\right) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, d]\!],\ A\left(y_i\right) = 0.$$

Si $d \leqslant n$, il existe un polynôme non nul de E_n s'annulant en les y_i à savoir $A = \prod_{i=1}^{d}(X - y_i)$ et dans ce cas, Δ_n n'est pas un produit scalaire. Si $d > n$, un polynôme A de E_n s'annulant en les d réels deux à deux distincts $y_1, \ldots, y_d$ est nécessairement le polynôme nul. Dans ce cas, Δ_n est un produit scalaire.

En résumé, Δ_n est un produit scalaire sur $E_n \times E_n$ si et seulement si $d \geqslant n + 1$.

3) a)

i) $\Delta_2(1, 1) = 1$, $\Delta_2(1, X) = \Delta_2(X, 1) = \frac{1}{2}$, $\Delta_2\left(X^2, 1\right) = \Delta_2(X, X) = \Delta_2\left(1, X^2\right) = \frac{1}{3}$, $\Delta_2\left(X, X^2\right) = \Delta_2\left(X^2, X\right) = \frac{1}{4}$ et enfin, $\Delta_2\left(X^2, X^2\right) = \frac{1}{5}$ puis

$$\begin{aligned}
&\Delta_2\left(a_2X^2 + a_1X + a_0\ , b_2X^2 + b_1X + b_0\right)\\
&\qquad = a_0b_0 + \frac{1}{2}\left(a_0b_1 + a_1b_0\right) + \frac{1}{3}\left(a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0\right) + \frac{1}{4}\left(a_1b_2 + a_2b_1\right) + \frac{1}{5}a_2b_2\\
&\qquad = a_0\left(b_0 + \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{3}b_2\right) + a_1\left(\frac{1}{2}b_0 + \frac{1}{3}b_1 + \frac{1}{4}b_2\right) + a_2\left(\frac{1}{3}b_0 + \frac{1}{4}b_1 + \frac{1}{5}b_2\right)\\
&\qquad = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_0 + \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{3}b_2\\ \frac{1}{2}b_0 + \frac{1}{3}b_1 + \frac{1}{4}b_2\\ \frac{1}{3}b_0 + \frac{1}{4}b_1 + \frac{1}{5}b_2 \end{pmatrix}\\
&\qquad = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_0\\ b_1\\ b_2 \end{pmatrix}\\
&\qquad = {}^tC_A H_{\varphi}^{(3)} C_B.
\end{aligned}$$

ii) On sait déjà que Δ_2 est bilinéaire symétrique. D'après la question 4) de la partie I, si $A = a_2X^2 + a_1X + a_0 \in E^2$, alors

$$\Delta_2(A, A) = {}^tC_A H_{\varphi}^{(3)} C_A = \int_0^1 \left(a_2t^2 + a_1t + a_0\right)^2\ dt \geqslant 0$$

et de plus,

$$\begin{aligned}\Delta_2(A,A)=0 &\Leftrightarrow \int_0^1 \left(a_2t^2+a_1t+a_0\right)^2\ dt=0\\ &\Rightarrow \forall t\in[0,1],\ \left(a_2t^2+a_1t+a_0\right)^2=0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)}\\ &\Rightarrow a_0=a_1=a_2=0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines)}\\ &\Rightarrow A=0.\end{aligned}$$

Donc, Δ_2 est un produit scalaire sur E_2.

b) On note $\|\ \|$ la norme associée au produit scalaire Δ_2. Posons $B_0=1$, $B_1=X$ et $B_2=X^2$.

- $\|B_0\|^2=\Delta_2(B_0,B_0)=1$. On obtient $e_0=B_0=1$.
- $\Delta_2(B_1,e_0)=\Delta_2(X,1)=\dfrac{1}{2}$ puis $B_1-\Delta_2(B_1,e_0)\,e_0=X-\dfrac{1}{2}$ puis

$$\left\|X-\frac{1}{2}\right\|^2=\Delta_2\left(X-\frac{1}{2},X-\frac{1}{2}\right)=\Delta_2(X,X)-2\times\frac{1}{2}\Delta_2(1,X)+\frac{1}{4}\Delta_2(1,1)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$$

On obtient

$$e_1=\frac{1}{\left\|X-\frac{1}{2}\right\|}\left(X-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{12}\left(X-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}(2X-1).$$

- $\Delta_2(B_2,e_0)=\Delta_2\left(X^2,1\right)=\dfrac{1}{3}$ et $\Delta_2(B_2,e_1)=\sqrt{3}\left(2\times\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ puis

$$B_2-\Delta_2(B_2,e_0)\,e_0-\Delta_2(B_2,e_1)\,e_1=X^2-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}\times\sqrt{3}(2X-1)=X^2-X+\frac{1}{6}.$$

Enfin,

$$\left\|X^2-X+\frac{1}{6}\right\|^2=\frac{1}{5}-2\times\frac{1}{4}+\left(1+\frac{2}{6}\right)\frac{1}{3}-\frac{2}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{36}=\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{4}{9}-\frac{1}{6}+\frac{1}{36}=\frac{36-90+80-30+5}{180}=\frac{1}{180}.$$

On obtient $e_2=\sqrt{180}\left(X^2-X+\dfrac{1}{6}\right)=\sqrt{5}\left(6X^2-6X+1\right)$.

L'orthonormalisée de Schmidt de la base canonique de E_2 est (e_0,e_1,e_2) où $e_0=1$, $e_1=\sqrt{3}(2X-1)$ et $e_2=\sqrt{5}\left(6X^2-6X+1\right)$.

c)

i) Par définition de l'orthonormalisée, $B_0\in\mathrm{Vect}(e_0)$ et $B_1\in\mathrm{Vect}(e_0,e_1)$. Donc, N est triangulaire.

ii) Tout d'abord $N=\mathscr{P}_{\mathscr{B}'_2}^{\mathscr{B}_2}=\left(\mathscr{P}_{\mathscr{B}_2}^{\mathscr{B}'_2}\right)^{-1}=M^{-1}$.
Notons C_1, C_2 et C_3 les colonnes de M. Soit $(i,j)\in[\![1,3]\!]^2$. D'après la question 3.a)i), le coefficient ligne i, colonne j, de ${}^tMH_\varphi^{(3)}M$ est

$${}^tC_iH_\varphi^{(3)}C_j=\Delta_2(e_i,e_j)=\delta_{i,j}$$

car la base (e_0,e_1,e_2) est orthonormée pour le produit scalaire Δ_2. Donc, ${}^tMH_\varphi^{(3)}M=I_3$ puis

$$H_\varphi^{(3)}=\left({}^tM\right)^{-1}M^{-1}={}^t\left(M^{-1}\right)M^{-1}={}^tNN.$$

d) De manière générale, Δ_{n-1} est un produit scalaire sur E_{n-1}. Soient $\mathscr{B}_{n-1}$ la base canonique de E_{n-1} et $\mathscr{B}'_{n-1}$ son orthonormalisée pour le produit scalaire Δ_{n-1}. Soient $T^{(n)}=\mathscr{P}_{\mathscr{B}'_{n-1}}^{\mathscr{B}_{n-1}}$. $T^{(n)}$ est triangulaire et de plus, pour les mêmes raisons que précédemment,

$${}^t\left(\left(T^{(n)}\right)^{-1}\right)H_\varphi^{(n)}\left(T^{(n)}\right)^{-1}=I_n$$

et donc

$$H_\varphi^{(n)}={}^tT^{(n)}T^{(n)}.$$

Partie III. Polynômes positifs et matrices de moments

1) a) Soit P un polynôme positif. Donc, P est non nul et pour tout x réel, $P(x) \geqslant 0$.

Soit a une éventuelle racine réelle de P. Soit $\alpha \geqslant 1$ l'ordre de multiplicité de λ. Il existe donc un polynôme Q tel que $P = (X-a)^\alpha Q$ et $Q(a) \neq 0$. Mais alors, $P(x) \underset{x \to a}{\sim} Q(a)(x-a)^\alpha$. Puis $(x-a)^\alpha \underset{x \to a}{\sim} \dfrac{1}{Q(a)} P(x)$. Puisque P est positif, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{Q(a)} P(x)$ s'annule en a et ne change pas de signe en a. Il doit en être de même de la fonction $x \mapsto (x-a)^\alpha$. Ceci impose que l'entier α soit pair.

b) Soit $Q = aX^2 + bX + c$ où a, b et c sont trois réels tels que $a \neq 0$. Q est positif si et seulement si $a > 0$ et $b^2 - 4ac = \Delta \leqslant 0$. On a alors

$$Q = a\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = \left(\sqrt{a}\left(X + \frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2.$$

Les polynômes $A = \sqrt{a}\left(X + \dfrac{b}{2a}\right)$ et $B = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ conviennent.

c) Soit $(A, B, C, D) \in (\mathbb{R}[X])^4$.

$$(AC + BD)^2 + (AD - BC)^2 = A^2C^2 + A^2D^2 + B^2C^2 + B^2D^2 = \left(A^2 + B^2\right)\left(C^2 + D^2\right).$$

Donc, un produit de deux polynômes qui sont somme de deux carrés de polynômes est une somme de deux carrés de polynômes. Par récurrence, un produit d'un nombre fini de polynômes qui sont somme de deux carrés de polynômes est une somme de deux carrés de polynômes.

d) Soit P un polynôme positif de degré n supérieur ou égal à 1. Les éventuelles racines réelles de P sont d'ordre pair d'après la question a) et donc la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ s'écrit

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{k} (X - x_i)^{2\alpha_i} \prod_{j=1}^{\ell} \left(X^2 + a_jX + b_j\right)^{\beta_i}$$

où les x_i sont des réels deux à deux distincts, les (a_j, b_j) sont des couples deux à deux distincts de réels tels que $a_j^2 - 4b_j < 0$ et les α_i et les β_i sont des entiers naturels tels que $2\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i + \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j\right) = n$ (ce qui impose le fait que n est pair).

Puisque P est positif de degré supérieur ou égal à 1, on a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$ ce qui impose $\lambda > 0$. Soit $Q = \sqrt{\lambda} \displaystyle\prod_{i=1}^{k} (X - x_i)^{\alpha_i}$.

Alors $\lambda \displaystyle\prod_{i=1}^{k} (X - x_i)^{2\alpha_i} = Q^2$.

Ensuite, chaque (éventuel) trinôme $X^2 + a_jX + b_j$ s'écrit sous la forme $R_j^2 + S_j^2$ où R_j et S_j sont de polynômes à coefficients réels. D'après la question précédente, $\displaystyle\prod_{j=1}^{\ell} \left(X^2 + a_jX + b_j\right)^{\beta_i}$ s'écrit sous la forme $R^2 + S^2$ où R et S sont de polynômes à coefficients réels. Soient alors $A = QR$ et $B = QS$. A et B sont des polynômes à coefficients réels tels que

$$P = Q^2\left(R^2 + S^2\right) = (QR)^2 + (QS)^2 = A^2 + B^2.$$

Le résultat reste clair si P est un polynôme de degré 0. Inversement, si A et B sont deux polynômes à coefficients réels, l'un au moins des deux polynômes A ou B étant non nul, le polynôme $P = A^2 + B^2$ est un polynôme positif.

On a montré que l'ensemble des polynômes positifs est l'ensemble des polynômes non nuls de la forme $A^2 + B^2$ où A et B sont deux polynômes à coefficients réels.

e) Supposons que Δ_n soit un produit scalaire sur $E_n \times E_n$. Soit P polynôme positif de E_{2n}. D'après la question précédente, il existe deux polynômes A et B à coefficients réels tels que $P = A^2 + B^2$. On a $2\deg(A) = \deg\left(A^2\right) \leqslant \deg(P) \leqslant 2n$ et donc $A \in E_n$. De même, $B \in E_n$. De plus, si $A = 0$, $\delta_n\left(A^2\right) = 0$ et si $A \neq 0$, $\delta_n\left(A^2\right) = \Delta_n(A, A) > 0$ et de même, pour B. Puisque l'un au moins des deux polynômes A ou B est non nul,

$$\delta_n(P) = \delta_n\left(A^2\right) + \delta_n\left(B^2\right) = \Delta_n(A, A) + \Delta_n(B, B) > 0.$$

Réciproquement, supposons pour tout polynôme positif P de E_{2n}, on ait $\delta_n(P) > 0$. On sait déjà que Δ_n est une forme bilinéaire symétrique sur $E_n \times E_n$. Soit alors $A \in E_n \setminus \{0\}$. Le polynôme $P = A^2$ est un polynôme positif de E_{2n} et donc

$$\Delta_n(A,A) = \delta_n\left(A^2\right) = \delta_n(P) > 0.$$

Par suite, Δ_n est un produit scalaire sur $E_n \times E_n$.

2) a) Par définition de l'orthonormalisée, our tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\text{Vect}\,(P_i)_{0\leqslant i\leqslant k} = \text{Vect}\left(X^i\right)_{0\leqslant i\leqslant k}$. On en déduit par récurrence que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\deg(P_k) = k$ et que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $(P_i)_{0\leqslant i\leqslant k}$ est une base orthonormée de E_k.

En particulier, $P_n \in (P_0,\ldots,P_{n-1})^{\perp} = E_{n-1}^{\perp}$ et en particulier, P_n est orthogonal à tout polynôme de degré au plus $n-2$ (erreur d'énoncé ?).

b) Supposons que P_n admette une racine réelle a d'ordre $\alpha \geqslant 2$. Il existe $Q \in E_{n-2}\setminus\{0\}$ tel que $P_n = (X-a)^2Q$. D'après la question a), on a alors

$$0 = \Delta_n\left(P_n, Q\right) = \delta_n\left(P_nQ\right) = \delta_n\left((X-a)^2Q^2\right).$$

Mais le polynôme $(X-a)^2Q^2$ est un polynôme positif et Δ_n est un produit scalaire sur E_n. D'après la question 1.e), on doit avoir $\delta_n\left((X-a)^2Q^2\right) > 0$. Ceci est une contradiction et donc toute éventuelle racine réelle de P_n est simple.

Si P_n n'a pas de racine réelle, on pose $k = 0$ et $Q_1 = 1$ et si P admet au moins une racine réelle, on pose $Q_1 = (X-a_1)\ldots(X-a_k)$ où $k \in [\![1,n]\!]$ et les a_i sont les racines réelles deux distinctes de P_n, toutes simples.
Dans tous les cas, il existe un polynôme Q_2 à coefficients réels tel que $P_n = Q_1Q_2$ avec $Q_2 \in E_{n-k}\setminus\{0\}$. Q_2 n'a pas de racine réelle et est donc de signe constant sur $\mathbb{R}$ puis le polynôme polynôme Q_2 est positif car $Q_2(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{P_n(x)}{x^k} > 0$.

Supposons par l'absurde que $k < n$. Alors, $Q_1 \in E_{n-1}$ puis

$$0 = \Delta_n\left(P_n, Q_1\right) = \delta_n\left(Q_1^2Q_2\right).$$

Mais le polynôme $Q_1^2Q_2$ est un polynôme positif et donc $\delta_n\left(Q_1^2Q_2\right) > 0$. Ceci est une contradiction et donc $k = n$ ou encore P_n admet n racines réelles simples.

3) a) Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\deg(L_k) = n-1$ et en particulier, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $L_k \in E_{n-1}$.
Soit $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\lambda_iL_i = 0 &\Rightarrow \forall k \in [\![1,n]\!],\ \sum_{i=0}^{n}\lambda_iL_i\left(\alpha_k\right)\\ &\Rightarrow \forall k \in [\![1,n]\!],\ \sum_{i=0}^{n}\lambda_i\delta_{i,k} = 0\\ &\Rightarrow \forall k \in [\![1,n]\!],\ \lambda_k = 0.\end{aligned}$$

Donc, $(L_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille libre de E_{n-1}. Puisque $\text{card}\,(L_i)_{1\leqslant i\leqslant n} = n = \dim(E_{n-1}) < +\infty$, on en déduit que $(L_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de E_{n-1}.

Soit $P \in E_{n-1}$. D'après la question précédente, il existe $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $P = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_iL_i$. En évaluant les deux membres de cette égalité en α_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, on obtient

$$P\left(\alpha_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_iL_i\left(\alpha_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\delta_{i,j}. = \lambda_j.$$

Ainsi,

$$\forall P \in E_{n-1},\ P = \sum_{i=1}^{n}P\left(\alpha_i\right)L_i.$$

En particulier,

$$\sum_{i=1}^{n}L_i = \sum_{i=1}^{n}1\times L_i = 1.$$

b)

i) Soit $Q \in E_{2n-1}$. Le polynôme P_n est un polynôme non nul de degré $n \leqslant 2n-1$. La division euclidienne de Q par P_n fournit deux polynômes A et R tels que $Q = P_nA + R$ et $\deg(R) < \deg(P_n) = n$. Donc, $R \in E_{n-1}$ et d'autre part,

$$\deg(P_n)+\deg(A)=\deg(P_nA)=\deg(Q-R)\leqslant 2n-1$$

et donc $\deg(A)\leqslant n-1$ ou encore $A\in E_{n-1}$.

ii)

$$\begin{aligned}\delta_n(Q)&=\delta_n(P_nA+R)=\Delta_n(P_n,A)+\delta_n(R)\\&=\delta_n(R)\text{ (car }A\in E_{n-1}\text{ et }P_n\in E_{n-1}^{\perp})\\&=\sum_{i=1}^{n}R(\alpha_i)\,\delta_n(L_i)\ \text{ (d'après la question précédente car }R\in E_{n-1})\\&=\sum_{i=1}^{n}Q(\alpha_i)\,\delta_n(L_i)\ \text{ (car pour }i\in[\![1,n]\!],\ R(\alpha_i)=Q(\alpha_i)-P_n(\alpha_i)A(\alpha_i)=Q(\alpha_i)).\end{aligned}$$

c) Soit $k\in[\![1,n]\!]$. Alors, L_k^2 est un élément de $E_{2n-2}\subset E_{2n-1}$ qui est positif. Donc, d'après la question précédente,

$$0<\delta_n\left(L_k^2\right)=\sum_{i=1}^{n}L_k^2(\alpha_i)\,\delta_n(L_i)=\sum_{i=1}^{n}\delta_{i,k}p_i=p_k$$

et donc pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $p_k>0$. D'autre part,

$$\sum_{k=1}^{n}p_k=\sum_{k=1}^{n}\delta_n(L_k)=\delta_n\left(\sum_{k=1}^{n}L_k\right)=\delta_n(1)=1\times\varphi(0)=1.$$

4) a) Soit Z une variable aléatoire définie sur l'espace $(\Omega,\mathscr{A},P)$ prenant les valeurs α_1, ..., α_n avec les probabilités respectives $p_1=\delta_n(L_1)$, ..., $p_n=\delta_n(L_n)$ (Z existe puisque les p_i sont strictement positifs de somme 1).

Soit $k\in[\![1,2n-1]\!]$ puis $Q=X^k$. D'après la formule de transfert et la question précédente,

$$\begin{aligned}E\left(Z^k\right)&=\sum_{i=1}^{n}Q(\alpha_i)\,p_i=\sum_{i=1}^{n}Q(\alpha_i)\,\delta_n(L_i)=\delta_n(Q)\\&=\delta_n\left(X^k\right)=\sum_{i=0}^{2n}\delta_{i,k}\varphi(i)=\varphi(k).\end{aligned}$$

Donc, Z convient.

b) D'après la question précédente, le nombre minimal cherché d est inférieur ou égal à n (puisque $\varphi(0)=1$). Réciproquement, supposons l'existence de Z. Puisque Δ_{n-1} est un produit scalaire sur E_{n-1}, la question 2. de la partie II montre que $d\geqslant n$ et finalement, le nombre minimal de valeur prises par Z est $d=n$.

