Asie 2015. Enseignement spécifique. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de flèches qui atteignent la cible. X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 4 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues, « la flèche atteint la cible »avec une probabilité $p = 0,8$ et « la flèche n'atteint pas la cible »avec une probabilité $1 - p = 0,2$.

X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,8$.

La probabilité demandée est $P(X \geqslant 3)$. La calculatrice fournit

$$\begin{aligned} P(X \geqslant 3) &= P(X = 3) + P(X = 4) = \binom{4}{3} 0,8^3 0,2^1 + \binom{4}{4} 0,8^4 0,2^0 = 0,8^4 + 4 \times 0,8^3 \times 0,2 = 2 \times 0,8^4 \\ &= 0,819 \text{ arrondi au millième.} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(X \geqslant 3) = 0,819 \text{ arrondi au millième.}}$$

2) Dans cette question, on note n le nombre de flèches tirées et X la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,8$. On sait que $E(X) = np = 0,8n$. On veut que cette espérance soit égale à 12.

$$E(X) = 12 \Leftrightarrow 0,8n = 12 \Leftrightarrow n = \frac{12}{0,8} \Leftrightarrow n = 15.$$

$$\boxed{\text{Le concurrent doit prévoir 15 flèches pour atteindre 12 fois la cible en moyenne.}}$$

Partie B

1) La probabilité demandée est $P((X < -10) \cup (X > 10)) = 1 - P(-10 \leqslant X \leqslant 10) = 1 - P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma)$. La calculatrice (ou le cours) fournit $P(-10 \leqslant X \leqslant 10) = 0,683$ arrondi au millième ou encore

$$\boxed{P((X < -10) \cup (X > 10)) = 0,317 \text{ arrondi au millième.}}$$

2) Soit x l'abscisse du bord vertical droit de la cible. On veut $P(-x \leqslant X \leqslant x) = 0,6$. Or

$$\begin{aligned} P(-x \leqslant X \leqslant x) &= P(X \leqslant x) - P(X \leqslant -x) = P(X \leqslant x) - P(X \geqslant x) = P(X \leqslant x) - (1 - P(X \leqslant x)) \\ &= 2P(X \leqslant x) - 1, \end{aligned}$$

puis $P(-x \leqslant X \leqslant x) = 0,6 \Leftrightarrow 2P(X \leqslant x) - 1 = 0,6 \Leftrightarrow P(X \leqslant x) = 0,8$. La calculatrice fournit alors $x = 8,4$ arrondi au dixième.

Pour quer la probabilité considérée soit égale à $0,6$, il faut et il suffit que les bords verticaux aient pour équations respectives $x = 8,4$ arrondi au dixième et $x = -8,4$ arrondi au dixième.

Partie C

1) Soit a un réel positif.

$$\begin{aligned} P(T \leqslant a) &= \int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^a = \left(-e^{-\lambda a}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda a} \\ &= 1 - e^{-0,0001a} \end{aligned}$$

et aussi

$$P(T \geqslant a) = 1 - P(T \leqslant a) = 1 - \left(1 - e^{-0,0001a}\right) = e^{-0,0001a}.$$

La probabilité demandée est $P(T \geqslant 2000)$.

$$P(T \geqslant 2000) = e^{-0,0001 \times 2000} = e^{-0,2} = 0,819 \text{ arrondi au millième.}$$

$\boxed{P(T \geqslant 2000) = 0,819 \text{ arrondi au millième.}}$

2) a) La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t,

$$F'(t) = (-1)e^{-\lambda t} + \left(-t - \frac{1}{\lambda}\right)\left(-\lambda e^{-\lambda t}\right) = -e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} = \lambda t e^{-\lambda t} = f(t).$$

Donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b) Soit x un réel positif.

$$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\,dt = \left[\left(-t - \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}\right]_0^x = \left(-x - \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x} - \left(-\frac{1}{\lambda}\right)e^0 = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}(-\lambda x)e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}.$$

Déjà, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\lambda x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$. D'autre part, d'après un théorème de croissances comparées,

$$\lim_{x\to+\infty} -\lambda x e^{-\lambda x} = \lim_{X\to-\infty} X e^X = 0.$$

On en déduit que

$$E(T) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda} + \frac{0}{\lambda} - \frac{0}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}.$$

Ici, $\lambda = 10^{-4}$ et donc $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = 10^4$. Ainsi, l'espérance de durée de vie du panneau électrique est de $10\,000$ heures.

EXERCICE 2

1) Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}_1$ est le vecteur $\overrightarrow{n_1}$ de coordonnées $(1,1,1)$ et un vecteur normal au plan $\mathscr{P}_2$ est le vecteur $\overrightarrow{n_2}$ de coordonnées $(7,-2,1)$.

$$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 1\times 7 + 1\times(-2) + 1\times 1 = 6.$$

En particulier, $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} \neq 0$ ou encore, les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas orthogonaux. On en déduit que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas perpendiculaires. L'affirmation 1 est fausse.

2) Les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires et donc les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles. On en déduit que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants en une droite.

Notons $\mathscr{D}$ la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x=-3t \\ y=-2t+1 \\ z=-3t+4 \end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$. Soit $M(-3t,-2t+1,-3t+4)$, $t\in\mathbb{R}$, un point quelconque de $\mathscr{D}$.

$$x_M + y_M + z_M - 5 = -3t - 2t + 1 - 3t + 4 - 5 = -8t.$$

Par exemple, si $t=1$, $x_M+y_M+z_M-5\neq 0$ ou encore le point $(-3,-1,1)$ est un point de $\mathscr{D}$ qui n'appartient pas à $\mathscr{P}_1$. On en déduit que la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ n'est pas la droite $\mathscr{D}$. La proposition 2 est fausse.

3) Ici, $n=312$ et $f=\dfrac{223}{312}$. On note que $n\geqslant 30$, $nf=223\geqslant 5$ et $n(1-f)=89\geqslant 5$. Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% est

$$\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}, f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[\frac{223}{312}-\frac{1}{\sqrt{312}}, \frac{223}{312}-\frac{1}{\sqrt{312}}\right] = [0,658; 0,772]$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La proposition 3 est probablement vraie.

4) Décrivons les différentes de l'algorithme.

- $a=1$ et $b=2$.
- $b-a>0,3$ et donc $x=1,5$.
- $f(a)f(x)=f(1)f(1,5)=(-2)\times(-0,75)>0$. Donc $a=1,5$ et $b=2$.
- $b-a>0,3$ et donc $x=1,75$.
- $f(a)f(x)=(-0,75)\times(1)<0$. Donc $a=1,5$ et $b=1,75$.
- $b-a\leqslant 0,3$ et donc $x=\dfrac{1,5+1,75}{2}=1,625$.
- L'algorithme affiche $1,625$. La proposition 4 est fausse.

EXERCICE 3

Partie A

1) Soit $n \in \mathbb{N}$.

• Pour tout x de $[0,1]$, $x \geqslant 0$ et $e^{n(x-1)} \geqslant 0$ puis pour tout x de $[0,1]$, $x + e^{n(x-1)} \geqslant 0$. Donc, la fonction f_n est positive sur $[0,1]$.

• La fonction f_n est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout x de $[0,1]$,

$$f_n'(x) = 1 + ne^{n(x-1)}.$$

Pour tout x de $[0,1]$, $ne^{n(x-1)} \geqslant 0$ puis $1 + ne^{n(x-1)} \geqslant 0$. La fonction f_n' est positive sur $[0,1]$ et donc la fonction f_n est croissante sur $[0,1]$.

2) Pour tout entier naturel n, $f_n(1) = 1 + e^0 = 2$. Donc, le point $A(1,2)$ appartient à toutes les courbes $\mathscr{C}_n$.

3) Il semble que le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_n$ tende vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Démontrons ce résultat.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_n$ est

$$f_n'(x_A) = f_n'(1) = 1 + ne^0 = n + 1.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$, le résultat est démontré.

Partie B

1) Pour tout entier naturel n, $u_n = f_n(1) = 2$. Dans le cas où $x = 1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et en particulier convergente, de limite 2.

2) Soit $x \in [0,1[$. Pour tout entier naturel n, $e^{n(x-1)} = \left(e^{x-1}\right)^n$. La suite $\left(\left(e^{x-1}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = e^{x-1}$. Puisque $x < 1$, on a $x - 1 < 0$ puis $0 < e^{x-1} < 1$ et en particulier $-1 < q < 1$. On sait alors que

$$\lim_{n\to+\infty} e^{n(x-1)} = \lim_{n\to+\infty} q^n = 0.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x + 0 = x$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ de } [0,1[,\ \lim_{n\to+\infty} u_n = x.}$$

Partie C

Il semble que, quand n tend vers $+\infty$, A_n tende vers l'aire du triangle dont les sommets ont pour coordonnées respectives $(0,0)$, $(1,0)$ et $(1,1)$ ou encore il semble que, quand n tend vers $+\infty$, A_n tende vers $\dfrac{1}{2}$. Démontrons ce résultat.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est continue et positive sur $[0,1]$. Donc,

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^1 \left(x + e^{n(x-1)}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{n}e^{n(x-1)}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}e^0\right) - \left(0 + \frac{1}{n}e^{-n}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1 - e^{-n}}{n}. \end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - e^{-n}\right) = 1 - 0 = 1$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. En divisant, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 - e^{-n}}{n} = 0$ et finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \dfrac{1}{2} + 0 = \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} A_n = \frac{1}{2}.}$$

EXERCICE 4.

Partie A

1) a) Le discriminant de l'équation $z^2+z+1=0$ est $\Delta = 1^2-4\times 1\times 1 = -3 < 0$. L'équation $z^2+z+1=0$ admet deux solutions complexes non réelles conjuguées à savoir $z_1 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \overline{z_1} = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

$$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } z^2+z+1=0 \text{ sont } -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

b) En particulier, le nombre $j = -\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ est solution de l'équation $z^2+z+1=0$.

2) $|j| = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$ puis

$$j = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right).$$

j est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$ ou encore

$$\boxed{j = e^{\frac{2i\pi}{3}}.}$$

3) a) $j^3 = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3 = e^{\frac{2i\pi\times 3}{3}} = e^{2i\pi} = \cos(2\pi)+i\sin(2\pi) = 1$.

b) j est solution de l'équation $z^2+z+1=0$ et donc $j^2+j+1=0$ puis $j^2=-1-j$.

4) $\left|j^2-1\right| = \left|1-j^2\right| = \left|j^3-j^2\right| = \left|j^2\right|\times|j-1| = |j|^2\times|j-1| = |j-1|$ et $\left|j^2-j\right| = \left|1-j^2\right| = |j|\times|j-1| = |j-1|$.

En résumé, $|j-1| = \left|j^2-1\right| = \left|j^2-j\right|$ ou encore $PQ = PR = QR$. On en déduit que

$$\boxed{\text{Le triangle PQR est équilatéral.}}$$

Partie B

1) $a-c = -jb-j^2c-c = -jb+(j+1)c-c = -jb+jc = j(c-b)$.

2) $AC = CA = |a-c| = |j(c-b)| = |j|\times|c-b| = |c-b| = BC$.

3) $a-b = -jb-j^2c-b = (-j-1)b-j^2c = j^2bj^2c = j^2(b-c)$.

4) $BA = |a-b| = \left|j^2(b-c)\right| = |j|^2\,|b-c| = |b-c| = CB$. Ainsi, $AB = AC = BC$ et donc

$$\boxed{\text{Le triangle ABC est équilatéral.}}$$

