

Antilles Guyane 2015. Enseignement de spécialité

EXERCICE 4 : corrigé

Partie A

1)

- $a = 26$ et $b = 9$.
- Puisque $26 = 9 \times 2 + 8$ et donc $c = 8$.
- $a = 9$ et $b = 8$. Puis $c = 1$.
- $a = 8$ et $b = 1$. Puis $c = 0$.

L'algorithme affiche alors 1.

2) Algorithme modifié.

Variables :	c est un entier naturel a et b sont des entiers naturels non nuls
Entrée :	Demander a Demander b
Traitement :	Affecter à c le nombre $r(a, b)$ Tant que $c \neq 0$ Affecter à a le nombre b Affecter à b la valeur c Affecter à c le nombre $r(a, b)$ Fin Tant que
Sortie :	Si $b \neq 1$, afficher « les entiers a et b ne sont pas premiers entre eux » Sinon, afficher « les entiers a et b sont premiers entre eux »

Partie B

1) a) La lettre V correspond à $x = 21$.

$$9x + 2 = 9 \times 21 + 2 = 191 = 7 \times 26 + 9 \equiv 9 [26].$$

avec $0 \leq 9 \leq 25$. Donc, $x' = 9$. 9 correspond à la lettre J et donc la lettre V est codée par la lettre J.

b) D'après la question 1) de la partie A, les entiers 9 et 26 sont premiers entre eux. D'après le théorème de BÉZOUT, il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs tels que $9u + 26v = 1$.

Le couple $(u_0, v_0) = (3, -1)$ est un couple d'entiers relatifs vérifiant $9u_0 + 26v_0 = 1$.

c) Soient x et x' deux entiers naturels compris au sens large entre 0 et 25.

Si $x' \equiv 9x + 2 [26]$ alors $3x' \equiv 27x + 6 [26]$ puis $3x' \equiv x - 20 [26]$ et donc $x \equiv 3x' + 20 [26]$.

Si $x \equiv 3x' + 20 [26]$ alors $9x \equiv 27x' + 180 [26]$ puis $9x \equiv x' - 2 [26]$ (car $180 + 2 = 182 = 7 \times 26$) et donc $x' \equiv 9x + 2 [26]$.

On a montré que $x' \equiv 9x + 2 [26]$ si et seulement si $x \equiv 3x' + 20 [26]$.

d) La lettre R correspond à $x' = 17$. Puis $x \equiv 3 \times 17 + 20 [26]$ ou encore $x \equiv 71 [26]$ ou enfin $x \equiv 19 [26]$ avec $0 \leq 19 \leq 25$. 19 correspond à la lettre T. Donc, la lettre R code la lettre T.

2) La lettre J correspond à 9 et la lettre D correspond à 3. Donc,

$$3 \equiv p \times 9 + 2 [26].$$

On en déduit que $9p \equiv 1 [26]$ puis que $3 \times 9p \equiv 3 \times 1 [26]$ puis que $p \equiv 3 [26]$ avec $0 \leq 3 \leq 25$. Donc, $p = 3$.

3) La lettre B correspond à $x = 1$. $x' = 13 + 2 = 15 \equiv 15 [26]$ avec $0 \leq 15 \leq 26$. 15 correspond à la lettre P et donc B est codée par P.

La lettre B correspond à $x = 3$. $x' = 3 \times 13 + 2 = 41 \equiv 15 [26]$. La lettre D est aussi codée par la lettre P.

En particulier, deux lettres distinctes sont codées par une même lettre. Le codage est donc mauvais.