AntillesGuyane 2015. Enseignement de spécialité

EXERCICE 4 (5 points) (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A.

Pour deux entiers naturels non nuls a et b, on note $r(a, b)$ le reste dans la division euclidienne de a par b. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	c est un entier naturel a et b sont des entiers naturels non nuls
Entrée :	Demander a Demander b

Traitement :
 	
Sortie :
	Affecter à c le nombre $r(a, b)$
	Tant que $c \neq 0$
	  Affecter à a le nombre b
	  Affecter à b la valeur c
	  Affecter à c le nombre $r(a, b)$
	Fin Tant que
	Afficher b

1) Faire fonctionner cet algorithme avec $a = 26$ et $b = 9$ en indiquant les valeurs de a, b et c à chaque étape.

2) Cet algorithme donne en sortie le PGCD des entiers naturels non nuls a et b.
Le modifier pour qu'il indique si deux entiers naturels non nuls a et b sont premiers entre eux ou non.

Partie B.

A chaque lettre de l'alphabet, on associe grâce au tableau ci-dessous un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :
Etape 1 : on choisit deux entiers naturels p et q compris entre 0 et 25.
Etape 2 : A la lettre que l'on veut coder, on associe l'entier x correspondant dans le tableau ci-dessus.
Etape 3 : on calcule l'entier x' défini par les relations

$$x' \equiv px + q \quad [26] \quad \text{et} \quad 0 \leqslant x' \leqslant 25.$$

Etape 4 : A l'entier x', on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1) Dans cette question, on choisit $p = 9$ et $q = 2$.

a) Démontrer que la lettre V est codée par la lettre J.

b) Citer le théorème qui permet d'affirmer l'existence de deux entiers relatifs u et v tels que $9u + 26v = 1$.
Donner sans justifier un couple (u, v) qui convient.

c) Démontrer que $x' \equiv 9x + 2 \quad [26]$ équivaut à $x \equiv 3x' + 20 \quad [26]$.

d) Décoder la lettre R.

2) Dans cette question, on choisit $q = 2$ et p est inconnu. On sait que J est codé par D.
Déterminer la valeur de p (on admettra que p est unique).

3) Dans cette question, on choisit $p = 13$ et $q = 2$. Coder les lettres B et D.
Que peut-on dire de ce codage ?

Antilles Guyane 2015. Enseignement de spécifialité

EXERCICE 4 : corrigé

Partie A

1)

• $a = 26$ et $b = 9$.
• Puisque $26 = 9 \times 2 + 8$ et donc $c = 8$.
• $a = 9$ et $b = 8$. Puis $c = 1$.
• $a = 8$ et $b = 1$. Puis $c = 0$.

L'algorithme affiche alors 1.

2) Algorithme modifié.

Variables :	c est un entier naturel a et b sont des entiers naturels non nuls
Entrée :	Demander a Demander b
Traitement :	Affecter à c le nombre $r(a, b)$ Tant que $c \neq 0$ Affecter à a le nombre b Affecter à b la valeur c Affecter à c le nombre $r(a, b)$ Fin Tant que
Sortie :	Si $b \neq 1$, afficher « les entiers a et b ne sont pas premiers entre eux » Sinon, afficher « les entiers a et b sont premiers entre eux »

Partie B

1) a) La lettre V correspond à $x = 21$.

$$9x + 2 = 9 \times 21 + 2 = 191 = 7 \times 26 + 9 \equiv 9\ [26].$$

avec $0 \leqslant 9 \leqslant 25$. Donc, $x' = 9$. 9 correspond à la lettre J et donc la lettre V est codée par la lettre J.

b) D'après la question 1) de la partie A, les entiers 9 et 26 sont premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs tels que $9u + 26v = 1$.

Le couple $(u_0, v_0) = (3, -1)$ est un couple d'entiers relatifs vérfiant $9u_0 + 26v_0 = 1$.

c) Soient x et x' deux entiers naturels compris au sens large entre 0 et 25.
Si $x' \equiv 9x + 2\ [26]$ alors $3x' \equiv 27x + 6\ [26]$ puis $3x' \equiv x - 20\ [26]$ et donc $x \equiv 3x' + 20\ [26]$.
Si $x \equiv 3x' + 20\ [26]$ alors $9x \equiv 27x' + 180\ [26]$ puis $9x \equiv x' - 2\ [26]$ (car $180 + 2 = 182 = 7 \times 26$) et donc $x' \equiv 9x + 2\ [26]$.

On a montré que $x' \equiv 9x + 2\ [26]$ si et seulement si $x \equiv 3x' + 20\ [26]$.

d) La lettre R correspond à $x' = 17$. Puis $x \equiv 3 \times 17 + 20\ [26]$ ou encore $x \equiv 71\ [26]$ ou enfin $x \equiv 19\ [26]$ avec $0 \leqslant 19 \leqslant 25$. 19 correspond à la lettre T. Donc, la lettre R code la lettre T.

2) La lettre J correspond à 9 et la lettre D correspond à 3. Donc,

$$3 \equiv p \times 9 + 2\ [26].$$

On en déduit que $9p \equiv 1\ [26]$ puis que $3 \times 9p \equiv 3 \times 1\ [26]$ puis que $p \equiv 3\ [26]$ avec $0 \leqslant 3 \leqslant 25$. Donc, $p = 3$.

3) La lettre B correspond à $x = 1$. $x' = 13 + 2 = 15 \equiv 15\ [26]$ avec $0 \leqslant 15 \leqslant 26$. 15 correspond à la lettre P et donc B est codée par P.

La lettre B correspond à $x = 3$. $x' = 3 \times 13 + 2 = 41 \equiv 15\ [26]$. La lettre D est aussi codée par la lettre P.

En particulier, deux lettres distinctes sont codées par une même lettre. Le codage est donc mauvais.

