

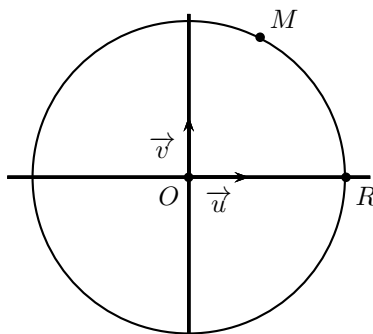
AntillesGuyane 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (4 points) (commun à tous les candidats)

Partie A

On appelle \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , on a placé un point M d'affixe z appartenant à \mathbb{C} , puis le point R intersection du cercle de centre O passant par M et du demi-axe $[0, \vec{u})$.



- 1) Exprimer l'affixe du point R en fonction de z .
- 2) Soit le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{1}{2} \left(\frac{z + |z|}{2} \right).$$

Reproduire la figure sur la copie et construire le point M' .

Partie B

On définit la suite de nombres complexes (z_n) par un premier terme z_0 appartenant à \mathbb{C} et, pour tout entier naturel n , par la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4}.$$

Le but de cette partie est d'étudier si le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ dépend du choix de z_0 .

- 1) Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel négatif?
- 2) Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel positif?
- 3) On suppose désormais que z_0 n'est pas un nombre réel.
 - a) Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$?
 - b) Démontrer cette conjecture, puis conclure.