AntillesGuyane 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (5 points) (commun à tous les candidats)

La partie C peut être traitée indépendamment des parties A et B.

Partie A

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
On rappelle que, pour tout réel a strictement positif,

$$P(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\, dt.$$

On se propose de calculer l'espérance mathématique de X, notée $E(X)$, et définie par

$$E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\, dt.$$

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
On admet que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = -\left(t + \dfrac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$.

1) Soit x un nombre réel strictement positif. Vérifier que

$$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1\right).$$

2) En déduire que $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Partie B

La durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire notée X suivant la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
La courbe de la fonction densité associée est représentée en **annexe 2**.

1) Sur le graphique de l'annexe 2 (à rendre avec la copie) :

a) Représenter la probabilité $P(X \leqslant 1)$.

b) Indiquer où se lit directement la valeur de λ.

2) On suppose que $E(X) = 2$.

a) Que représente dans le cadre de l'exercice la valeur de l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ?

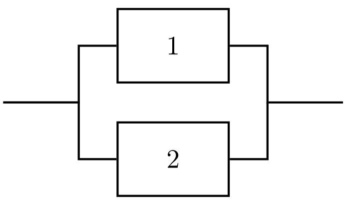
b) Calculer la valeur de λ.

c) Calculer $P(X \leqslant 2)$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à $0,01$ près.
Interpréter ce résultat.

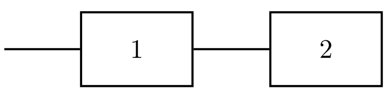
d) Sachant que le composant a déjà fonctionné une année, quelle est la probabilité que sa durée de vie totale soit d'au moins trois années ? On donnera la valeur exacte.

Partie C

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note D_1 l'événement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note D_2 l'événement « le composant 2 est défaillant avant un an ».
On suppose que les deux événements D_1 et D_2 sont indépendants et que $P(D_1) = P(D_2) = 0,39$.
Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-dessous :



Circuit en parallèle A



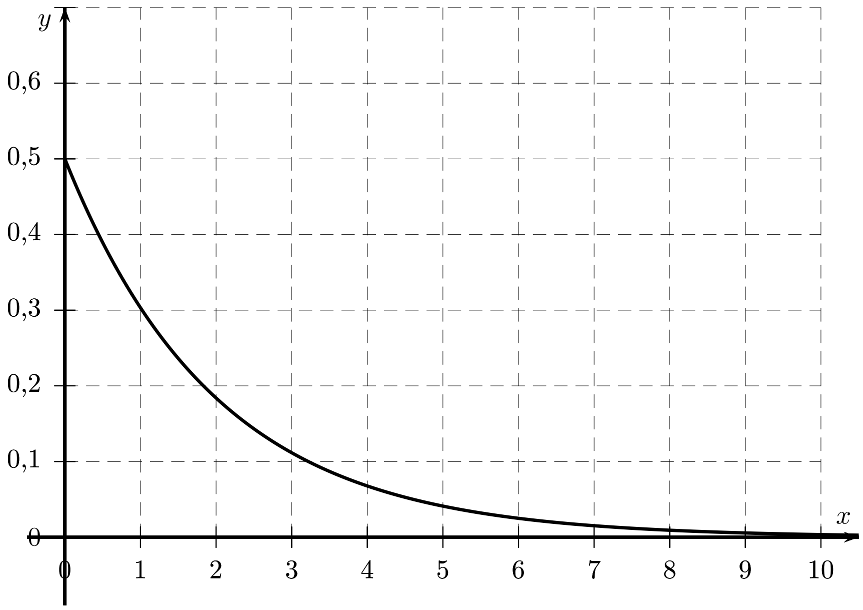
Circuit en série B

1) Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps.
Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.

2) Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

A RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE 2 de l'exercice 2



Antilles Guyane 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

Partie A

1) Soit $\lambda > 0$. Pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\,dt &= \left[-\left(t+\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}\right]_0^x = -\left(x+\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x} + \left(0+\frac{1}{\lambda}\right)e^0 \\ &= -\frac{\lambda x+1}{\lambda}e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1\right).\end{aligned}$$

2) Puisque $\lambda > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} -\lambda x e^{-\lambda x} = \lim\limits_{y\to-\infty} y e^y = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\lambda x} = \lim\limits_{y\to-\infty} e^y = 0$. Donc,

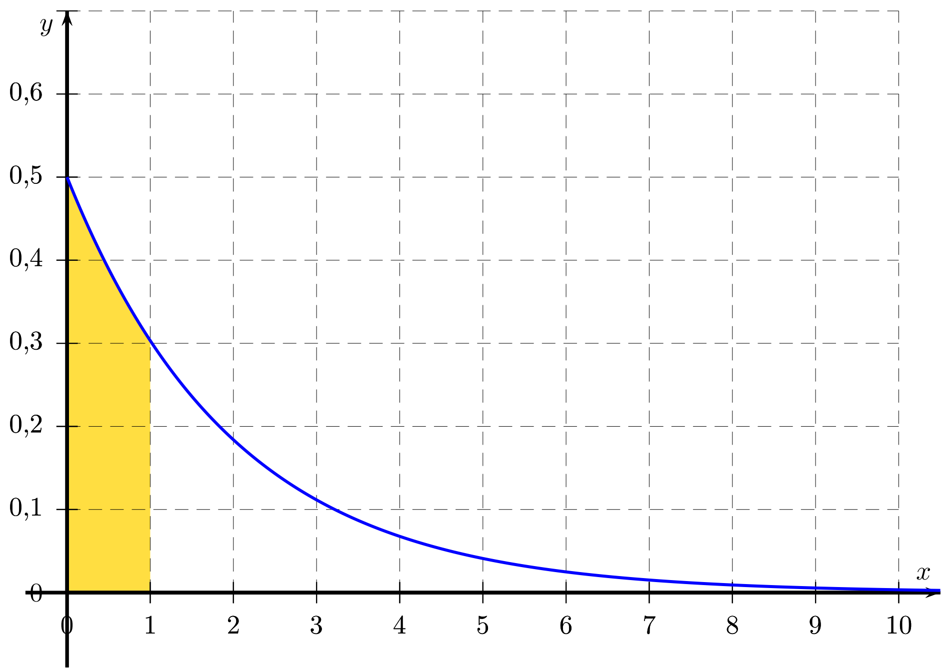
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1\right) = \frac{1}{\lambda}(0+0+1) = \frac{1}{\lambda}.$$

Ceci montre que

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{\lambda}.}$$

Partie B

1) a) $P(X \leqslant 1) = \displaystyle\int_0^1 \lambda e^{-\lambda x}\,dx$. La fonction densité représentée sur le graphique ci-dessous est la fonction $g\ :\ x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$. Donc, $P(X \leqslant 1)$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine coloré ci-dessous.



b) $g(0) = \lambda e^0 = \lambda$. λ est donc l'ordonnée du point de la courbe ci-dessus d'abscisse 0. Sur le graphique, on lit $\lambda = 0,5$.

2) a) Dire que $E(X) = 2$ signifie que en moyenne, la durée de vie d'un composant électronique est de 2 ans.

b) $\dfrac{1}{\lambda} = 2$ fournit $\lambda = \dfrac{1}{2}$ ou encore $\lambda = 0,5$.

c) Pour tout réel $a \geqslant 0$,

$$P(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^a = \left(-e^{-\lambda a}\right) - \left(-e^0\right) = 1 - e^{-\lambda a} = 1 - e^{-0,5a}.$$

En particulier, $P(X \leqslant 2) = 1 - e^{-0,5\times 2} = 1 - e^{-1} = 0,63$ arrondi à $0,01$. Ceci signifie que la probabilité que le composant électronique fonctionne au plus deux ans est environ $0,63$.

d) La probabilité demandée est $P_{X\geqslant 1}(X \geqslant 3)$.

$$P_{X\geqslant 1}(X \geqslant 3) = \frac{1 - \left(1 - e^{-0,5\times 3}\right)}{1 - \left(1 - e^{-0,5\times 1}\right)} = \frac{e^{-1,5}}{e^{-0,5}} = e^{-1}.$$

Partie C

1) La probabilité demandée, c'est-à-dire la probabilité que les deux composants soient défaillants avant un an, est $P\left(D_1 \cap D_2\right)$. Puisque les événements D_1 et D_2 sont indépendants,

$$P\left(D_1 \cap D_2\right) = P\left(D_1\right) \times P\left(D_2\right) = (0,39)^2 = 0,1521.$$

2) L'événement « le circuit B est défaillant avant un an » est l'événement contraire de l'événement « aucun des deux composants n'est défaillant avant un an » qui est l'événement $\overline{D_1} \cap \overline{D_2}$. Puisque les événements D_1 et D_2 sont indépendants, on sait que les événements $\overline{D_1}$ et $\overline{D_2}$ sont indépendants. Donc

$$P\left(\overline{D_1} \cap \overline{D_2}\right) = P\left(\overline{D_1}\right) \times P\left(\overline{D_2}\right) = (1 - 0,39)^2 = 0,61^2 = 0,3721.$$

La probabilité demandée est alors

$$1 - P\left(\overline{D_1} \cap \overline{D_2}\right) = 1 - 0,3721 = 0,6279.$$

