AntillesGuyane 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (6 points) (commun à tous les candidats)
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln x$.
Pour tout réel a strictement positif, on définit sur $]0, +\infty[$ la fonction g_a par $g_a(x) = ax^2$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f et Γ_a celle de la fonction g_a dans un repère du plan. Le but de l'exercice est d'étudier l'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et Γ_a suivant les valeurs du réel strictement positif a.

Partie A

On a construit en **annexe 1** (*à rendre avec la copie*) les courbes $\mathscr{C}$, $\Gamma_{0,05}$, $\Gamma_{0,1}$, $\Gamma_{0,19}$ et $\Gamma_{0,4}$.

1) Nommer les différentes courbes sur le graphique. Aucune justification n'est demandée.

2) Utiliser le graphique pour émettre une conjecture sur le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et Γ_a suivant les valeurs (à préciser) du réel a.

Partie B

Pour un réel a strictement positif, on considère la fonction h_a définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par

$$h_a(x) = \ln x - ax^2.$$

1) Justifier que x est l'abscisse d'un point M appartenant à l'intersection de $\mathscr{C}$ et Γ_a si et seulement si $h_a(x) = 0$.

2) a) On admet que la fonction h_a est dérivable sur $]0, +\infty[$, et on note h'_a la dérivée de la fonction h_a sur cet intervalle.
Le tableau de variation de la fonction h_a est donné ci-dessous.
Justifier, par le calcul, le signe de $h'_a(x)$ pour x appartenant à $]0, +\infty[$.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2a}}$		$+\infty$
$h'_a(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
h_a	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{-1-\ln(2a)}{2}$	$\searrow$	

b) Rappeler la limite de $\dfrac{\ln x}{x}$ en $+\infty$. En déduire la limite de la fonction h_a en $+\infty$.
On ne demande pas de justifier la limite de h_a en 0.

3) Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a = 0,1$.

a) Justifier que, dans l'intervalle $\left]0, \dfrac{1}{\sqrt{0,2}}\right]$, l'équation $h_{0,1}(x) = 0$ admet une unique solution.

On admet que cette équation a aussi une seule solution dans l'intervalle $\left]\dfrac{1}{\sqrt{0,2}}, +\infty\right[$.

b) Quel est le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{0,1}$?

4) Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a = \dfrac{1}{2e}$.

a) Déterminer la valeur du maximum de $h_{\frac{1}{2e}}$.

b) En déduire le nombre de points d'intersection des courbes $\mathscr{C}$ et $\Gamma_{\frac{1}{2e}}$. Justifier.

5) Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles $\mathscr{C}$ et Γ_a n'ont aucun point d'intersection ? Justifier.

A RENDRE AVEC LA COPIE

ANNEXE 1 de l'exercice 1