Amérique du sud 2015. Enseignement de spécialité. Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1) $u(1) = u(4) = 0$.

2) La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_u$ en $+\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 1$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{b}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{c}{x^2} = 0$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = a$. On en déduit que

$$\boxed{a = 1.}$$

3) Pour tout réel $x > 0$, $u(x) = 1 + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x^2}$. L'égalité $u(1) = 0$ fournit $1 + b + c = 0$ et l'égalité $u(4) = 0$ fournit $1 + \dfrac{b}{4} + \dfrac{c}{16} = 0$. Ensuite,

$$\left\{\begin{array}{l} 1+b+c=0 \\ 1+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{16}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b+c=-1 \\ 4b+c=-16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3b=-15 \ ((\mathrm{II})-(\mathrm{I})) \\ 4b+c=-16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=-5 \\ -20+c=-16 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=-5 \\ c=4 \end{array}\right. .$$

Mais alors, pour tout réel $x > 0$,

$$u(x) = 1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2} = \frac{x^2+5x+4}{x^2}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ de }]0,+\infty[,\ u(x) = \frac{x^2+5x+4}{x^2}.}$$

Partie B

1) Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = x - (5x\ln(x) + 4)\dfrac{1}{x}$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x) = 0$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 5x\ln(x) + 4 = 4 > 0$. D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

En multipliant, on obtient $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (5x\ln(x)+4)\dfrac{1}{x} = +\infty$. Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0$, en retranchant, on obtient

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty.}$$

2) Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = x\left(1 - 5\dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{4}{x^2}\right)$.

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x^2} = 0$.

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - 5\dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{4}{x^2}\right) = 1 - 5\times 0 + 0 = 1$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. En multipliant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

3) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = 1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-5x+4}{x^2} = u(x).$$

Pour tout réel $x > 0$, on a $x^2 > 0$. Donc, pour tout réel $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de x^2-5x+4. La partie A montre que le trinôme x^2-5x+4 admet pour racines les deux nombres réels $x_1 = 1$ et $x_2 = 4$. On sait que le trinôme x^2-5x+4 est du signe du coefficient de x^2, à savoir 1, sur $]-\infty,1[\cup]4,+\infty[$. En tenant compte de $f(1) = 1 - 5\ln(1) - 4 = -3$ et $f(4) = 4 - 5\ln(4) - \dfrac{4}{4} = 3 - 10\ln 2$, on en déduit le tableau de variations de f.

x	0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$3-10\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie C

1) La fonction u est continue et négative sur $[1,4]$. Donc,

$$\mathscr{A} = \int_1^4 -u(x)\ dx = [-f(x)]_1^4 = -f(4) + f(1) = -3 + 10\ln(2) - 3 = 10\ln 2 - 6.$$

$$\boxed{\mathscr{A} = 10\ln(2) - 6 = 0,9 \text{ arrondi à } 10^{-1}.}$$

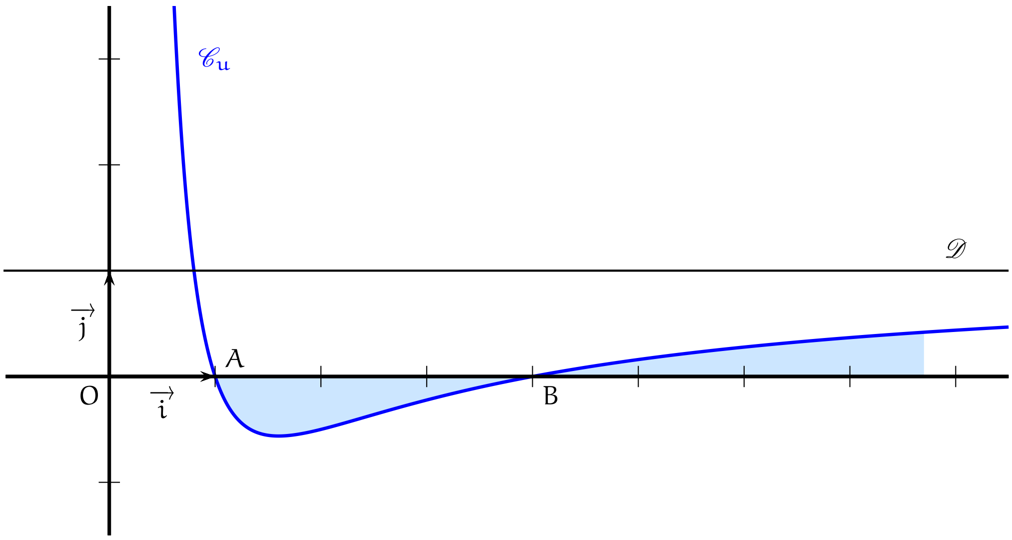
2) Soit λ un réel supérieur ou égal à 4. La fonction u est continue et positive sur $[4,\lambda]$. Donc

$$\mathscr{A}_\lambda = \int_4^\lambda u(x)\ dx = [f(x)]_4^\lambda = f(\lambda) - f(4).$$

Par suite,

$$\mathscr{A}_\lambda = \mathscr{A} \Leftrightarrow f(\lambda) - f(4) = f(1) - f(4) \Leftrightarrow f(\lambda) = -3.$$

D'après la partie B, la fonction f est continue et strictement croissante sur $[4,+\infty[$. De plus, $f(4) = -3,9\ldots < -3$ et $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} f(\lambda) = +\infty > -3$. On sait alors que l'équation $f(\lambda) = -3$ admet une solution et une seulme dans $[4,+\infty[$ ou encore il existe un réel λ de $[4,+\infty[$ et un seul tel que $\mathscr{A}_\lambda = \mathscr{A}$.



EXERCICE 2

1) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(1, 0, -2)$. D'autre part, la droite Δ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(4, -1, 2)$.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AC} = 4 \times 1 + (-1) \times 0 + 2 \times (-2) = 4 - 4 = 0.$$

Donc les droites Δ et (AC) sont orthogonales. L'affirmation 1 est vraie.

2) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-4, 3, -7)$. S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, alors $3 = 0 \times k$ (à partir de la deuxième coordonnée) ce qui est impossible. Donc, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ou encore les points A, B et C déterminent un plan.

- $2x_A + 5y_A + z_A - 5 = 2 \times 3 + 5 \times (-1) + 4 - 5 = 6 - 5 + 4 - 5 = 0$.
- $2x_B + 5y_B + z_B - 5 = 2 \times (-1) + 5 \times 2 + (-3) - 5 = -2 + 10 - 3 - 5 = 0$.
- $2x_C + 5y_C + z_C - 5 = 2 \times 4 + 5 \times (-1) + 2 - 5 = 8 - 5 + 2 - 5 = 0$.

Les trois points A, B et C appartiennent au plan d'équation $2x + 5y + z - 5 = 0$ et donc le plan (ABC) est le plan d'équation $2x + 5y + z - 5 = 0$. L'affirmation 2 est vraie.

3) Par exemple, si $s = s' = 0$, le point M_0 correspondant est $(1, 1, 1)$ et ce point n'appartient pas à $\mathscr{P}$ car $2x_M - 3y_M + 2z_M - 7 = 2 - 3 + 2 - 7 = -6 \neq 0$. L'affirmation 3 est fausse.

4) Le plan $\mathscr{P}$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}(2, -3, 2)$.

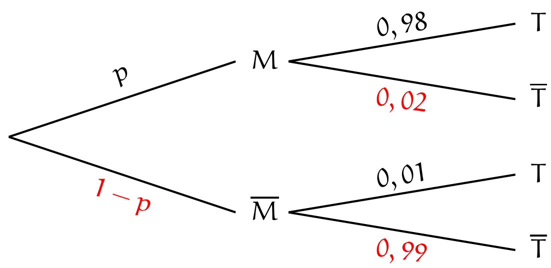
$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = 4 \times 2 + (-1) \times (-3) + 2 \times 2 = 15 \neq 0.$$

Donc la droite Δ est sécante au plan $\mathscr{P}$ puis la droite Δ est sécante à tout plan parallèle à $\mathscr{P}$. On en déduit qu'aucun plan parallèle à $\mathscr{P}$ ne contient la droite Δ. L'affirmation 4 est fausse.

EXERCICE 3

Partie A

1) a) L'énoncé fournit $P_M(T) = 0,98$, $P_{\overline{M}}(T) = 0,01$ et $P(M) = p$. Représentons la situation par un arbre de probabilité.



b) $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,98p$. $P\left(\overline{M} \cap T\right) = P\left(\overline{M}\right) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,01(1-p) = 0,01 - 0,01p$. Enfin, d'après la formule des probabilités totales,

$$P(T) = P(M \cap T) + P\left(\overline{M} \cap T\right) = 0,98p + 0,01 - 0,01p = 0,97p + 0,01.$$

2) a)

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,98p}{0,97p + 0,01} = \frac{0,98p \times 100}{(0,97p + 0,01) \times 100} = \frac{98p}{97p + 1}.$$

b) La fonction f est dérivable sur $[0,1]$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[0,1]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,1]$ et pour tout réel p de $[0,1]$,

$$f'(p) = \frac{98(97p + 1) - 98p \times 97}{(97p + 1)^2} = \frac{98}{(97p + 1)^2}.$$

La fonction f' est strictement positive sur $[0,1]$ et donc la fonction f est strictement croissante sur $[0,1]$.

3) Le test est fiable quand $P_T(M) \geqslant 0,95$ ou encore $f(p) \geqslant 0,95$.

$$f(p) \geqslant 0,95 \Leftrightarrow \frac{98p}{97p+1} \geqslant 0,95 \Leftrightarrow 98p \geqslant 92,15p + 0,95 \Leftrightarrow 5,85p \geqslant 0,95$$
$$\Leftrightarrow p \geqslant \frac{0,95}{5,85} \Leftrightarrow p \geqslant \frac{95}{585} \Leftrightarrow p \geqslant \frac{19}{117}.$$

Partie B

1) a) La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 1000 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la personne est atteinte par le virus » avec une probabilité $p = 0,15$ et « la personne n'est pas atteinte par le virus » avec une probabilité $1 - p = 0,85$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = 0,15$. On sait alors que pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant 1000$,

$$P(X = k) = \binom{1000}{k} (0,15)^k (0,85)^{1000-k}.$$

b) On note tout d'abord que $n \geqslant 30$ puis $np = 150$ et donc $np \geqslant 5$ et aussi $n(1-p) = 850$ et donc $n(1-p) \geqslant 5$.

Un intervalle de fluctuation au seuil 95% est

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right] = \left[0,15 - 1,96\sqrt{\frac{0,15 \times (1 - 0,15)}{1000}}, 0,15 + 1,96\sqrt{\frac{0,15 \times (1 - 0,15)}{1000}}\right]$$
$$= [0,127; 0,173].$$

en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La fréquence observée dans l'échantillon est $f = \dfrac{197}{1000} = 0,197$. Cette fréquence n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation et donc on peut affirmer que le pourcentage de 15% publié par l'institut de veille sanitaire est faux au risque de se tromper de 5%.

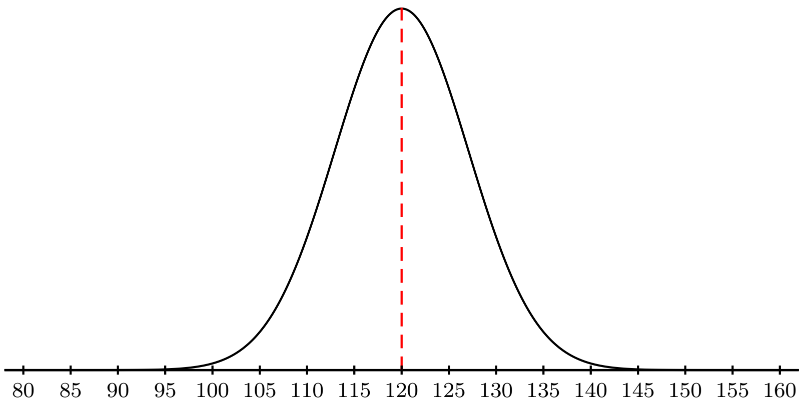
2) Ici, $n = 1000$ et $f = 0,197$. On est dans les conditions d'utilisation d'un intervalle de confiance car $n \geqslant 30$, $nf \geqslant 5$ et $n(1-f) \geqslant 5$. Un intervalle de confiance au niveau de confiance 95% est

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,197 - \frac{1}{\sqrt{1000}}, 0,197 + \frac{1}{\sqrt{1000}}\right] = [0,165; 0,229]$$

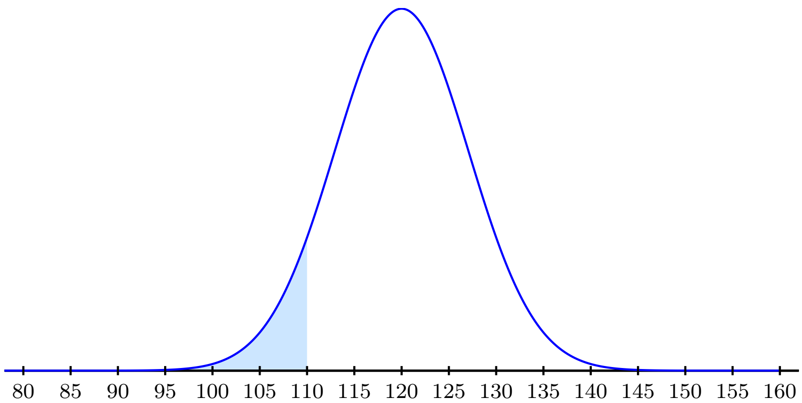
en arrondissant de manière à élargir un peu l'intervalle. La probabilité p appartient à l'intervalle $[0,165; 0,229]$ avec un niveau de confiance de 95%.

Partie C

1) a) Il semble que $\mu = 120$.



b)



2) a) On sait que T' suit la loi normale centrée réduite c'est-à-dire la loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1.

b)

$$T < 110 \Leftrightarrow T - \mu < 110 - \mu \Leftrightarrow \frac{T-\mu}{10} < \frac{110-\mu}{10} \Leftrightarrow$$

et donc $P(T < 110) = P\left(T' < \dfrac{110-\mu}{10}\right) = P\left(T' \leqslant \dfrac{110-\mu}{10}\right)$. La calculatrice fournit

$$P\left(T' \leqslant \frac{110-\mu}{10}\right) = 0,18 \Leftrightarrow \frac{110-\mu}{10} = -0,91\ldots$$

puis $\mu = 110 + 10 \times 0,91\ldots = 119,1\ldots$ à l'unité près par excès. Ceci valide la conjecture de la question 1)a).

EXERCICE 4.

1) a) Soit n un entier naturel. La population en zone rurale l'année $2010+n+1$, à savoir R_{n+1} est obtenu en retirant 10% de la même population l'année $2010+n$ (10% qui émigrent vers la ville) et en ajoutant 5% de la population en zone urbaine l'année $2010+n$ ou encore

$$R_{n+1} = R_n - 0,1R_n + 0,05C_n = 0,9R_n + 0,05C_n.$$

De même, $C_{n+1} = C_n + 0,1R_n - 0,05C_n = 0,1R_n + 0,95C_n$. Donc

$$MU_n = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_n \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9R_n + 0,05C_n \\ 0,1R_n + 0,95C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{n+1} \\ C_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}.$$

b) $U_1 = MU_0 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 90 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9\times 90 + 0,05\times 30 \\ 0,1\times 90 + 0,95\times 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82,5 \\ 37,5 \end{pmatrix}$. En particulier, $C_1 = 37,5$ ou encore il y a $37,5$ millions de citadins en 2011.

2) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $U_n = M^n U_0$.

- $M^1U_0 = MU_0 = U_1$. L'égalité est donc vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $U_n = M^nU_0$. Alors,

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= MU_n \text{ (d'après la question 1))} \\ &= M \times M^nU_0 \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= M^{n+1}U_0. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $U_n = M^nU_0$.

3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2}{3} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}-\frac{2}{3} & \frac{2}{3}+\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

et de même,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2}{3} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}-\frac{2}{3} & \frac{2}{3}+\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

4) a)

$$\begin{aligned} \Delta = P^{-1}MP &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0,85 \\ 2 & -0,85 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,85 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) $\Delta = P^{-1}MP \Rightarrow P\Delta P^{-1} = P \times P^{-1}MP \times P^{-1} = IMI = M$.

c) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $M^n = P\Delta^nP^{-1}$.

- $M^1 = M = P\Delta P^{-1}$ d'après la question précédente. L'égalité est donc vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $M^n = P\Delta^nP^{-1}$. Alors,

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M \times M^n \\ &= P\Delta P^{-1} \times P\Delta^nP^{-1} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= P\Delta I\Delta^nP^{-1} = P\Delta\Delta^nP^{-1} \\ &= P\Delta^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $M^n = P\Delta^n P^{-1}$.

5) a) $U_n = M^n U_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\times 0,85^n & \dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\times 0,85^n \\ \dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}\times 0,85^n & \dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\times 0,85^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 90 \\ 30 \end{pmatrix}$. En particulier,

$$R_n = 90\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times 0,85^n\right)+30\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times 0,85^n\right) = 30+60\times 0,85^n+10-10\times 0,85^n = 40+50\times 0,85^n,$$

puis, la population totale étant constante, égale à 120 millions,

$$C_n = 120 - R_n = 80 - 50\times 0,85^n.$$

b) Puisque $-1 < 0,85 < 1$, $/dlimn+\infty 0,85^n = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 40$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n = 80$.
A long terme, les nombres de ruraux et de citadins se stabiliseront autour de 40 millions et 80 millions respectivement.

6) a) Algorithme complété.

Entrée :	n, R et C sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0 R prend la valeur 90 C prend la valeur 30
Traitement :	Tant que $R \geqslant C$ faire n prend la valeur $n+1$ R prend la valeur $50\times 0,85^n + 40$ C prend la valeur $120 - R$ Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} R_n < C_n &\Leftrightarrow 40+50\times(0,85)^n < 80-50\times(0,85)^n \Leftrightarrow 100\times(0,85)^n < 40 \\ &\Leftrightarrow (0,85)^n < 0,4 \\ &\Leftrightarrow \ln\left((0,85)^n\right) < \ln(0,4) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\ &\Leftrightarrow n\ln(0,85) < \ln(0,4) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,4)}{\ln(0,85)} \text{ (car } \ln(0,85) < 0) \\ &\Leftrightarrow n > 5,6\ldots \\ &\Leftrightarrow n \geqslant 6. \end{aligned}$$

L'algorithme affiche la valeur 6 ou encore en 2016, le nombre de personnes habitant en zone rurale devient strictement inférieur au nombre de personnes habitant en zone urbaine pour la première fois.

