Amérique du sud 2015. Enseignement de spécialité

EXERCICE 4 (5 points) (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
- chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville ;
- chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n, on note :

- R_n l'effectif de la population rurale, exprimé en millions d'habitants, en l'année $2010+n$,
- C_n l'effectif de la population citadine, exprimé en millions d'habitants, en l'année $2010+n$.

On a donc $R_0 = 90$ et $C_0 = 30$.

1) On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} R_n \\ C_n \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n$.

b) Calculer U_1. En déduire le nombre de ruraux et le nombre de citadins en 2011.

2) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer U_n en fonction de M^n et de U_0.

3) Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de P et on la notera P^{-1}.

4) a) On pose $\Delta = P^{-1}MP$. Calculer Δ à l'aide de la calculatrice.

b) Démontrer que : $M = P\Delta P^{-1}$.

c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul :

$$M^n = P\Delta^n P^{-1}.$$

5) a) On admet que le calcul matriciel précédent donne :

$$M^n = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} \times 0,85^n & \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3} \times 0,85^n \\ \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3} \times 0,85^n & \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} \times 0,85^n \end{pmatrix}.$$

En déduire que, pour tout entier naturel n, $R_n = 50 \times 0,85^n + 40$ et déterminer l'expression de C_n en fonction de n.

b) Déterminer la limite de R_n et de C_n lorsque n tend vers $+\infty$.
Que peut-on en conclure pour la population étudiée ?

6) a) On admet que (R_n) est décroissante et que (C_n) est croissante.
Compléter l'algorithme donné en annexe afin qu'il affiche le nombre d'années au bout duquel la population urbaine dépassera la population rurale.

b) En résolvant l'inéquation d'inconnue n, $50 \times 0,85^n + 40 < 80 - 50 \times 0,85^n$, retrouver la valeur affichée par l'algorithme.

FEUILLE ANNEXE (à rendre avec la copie)

Exercice 4

Question 6 (à compléter et à remettre avec la copie)

Entrée :	n, R et C sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0 Rprend la valeur 90 C prend la valeur 30
Traitement : Sortie :	Tant que . . . . . . faire n prend la valeur . . . R prend la valeur $50 \times 0,85^n + 40$ C prend la valeur . . . Fin Tant que Afficher n

Amérique du Sud 2015. Enseignement de spécialité

EXERCICE 4 : corrigé

1) a) Soit n un entier naturel. La population en zone rurale l'année $2010+n+1$, à savoir R_{n+1} est obtenu en retirant 10% de la même population l'année $2010+n$ (10% qui émigrent vers la ville) et en ajoutant 5% de la population en zone urbaine l'année $2010+n$ ou encore

$$R_{n+1} = R_n - 0,1R_n + 0,05C_n = 0,9R_n + 0,05C_n.$$

De même, $C_{n+1} = C_n + 0,1R_n - 0,05C_n = 0,1R_n + 0,95C_n$. Donc

$$MU_n = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_n \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9R_n + 0,05C_n \\ 0,1R_n + 0,95C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{n+1} \\ C_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}.$$

b) $U_1 = MU_0 = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 90 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9\times 90 + 0,05\times 30 \\ 0,1\times 90 + 0,95\times 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82,5 \\ 37,5 \end{pmatrix}$. En particulier, $C_1 = 37,5$ ou encore il y a $37,5$ millions de citadins en 2011.

2) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $U_n = M^nU_0$.

- $M^1U_0 = MU_0 = U_1$. L'égalité est donc vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $U_n = M^nU_0$. Alors,

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= MU_n \text{ (d'après la question 1))} \\ &= M \times M^nU_0 \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= M^{n+1}U_0. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $U_n = M^nU_0$.

3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2}{3} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}-\frac{2}{3} & \frac{2}{3}+\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

et de même,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2}{3} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}-\frac{2}{3} & \frac{2}{3}+\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

4) a)

$$\begin{aligned} \Delta = P^{-1}MP &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0,85 \\ 2 & -0,85 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,85 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) $\Delta = P^{-1}MP \Rightarrow P\Delta P^{-1} = P \times P^{-1}MP \times P^{-1} = IMI = M$.

c) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $M^n = P\Delta^nP^{-1}$.

- $M^1 = M = P\Delta P^{-1}$ d'après la question précédente. L'égalité est donc vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $M^n = P\Delta^nP^{-1}$. Alors,

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M \times M^n \\ &= P\Delta P^{-1} \times P\Delta^nP^{-1} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= P\Delta I\Delta^nP^{-1} = P\Delta\Delta^nP^{-1} \\ &= P\Delta^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $M^n = P\Delta^n P^{-1}$.

5) a) $U_n = M^n U_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} \times 0,85^n & \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3} \times 0,85^n \\ \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3} \times 0,85^n & \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} \times 0,85^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 90 \\ 30 \end{pmatrix}$. En particulier,

$$R_n = 90\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0,85^n\right) + 30\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times 0,85^n\right) = 30 + 60 \times 0,85^n + 10 - 10 \times 0,85^n = 40 + 50 \times 0,85^n,$$

puis, la population totale étant constante, égale à 120 millions,

$$C_n = 120 - R_n = 80 - 50 \times 0,85^n.$$

b) Puisque $-1 < 0,85 < 1$, $/dlimn+\infty 0,85^n = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 40$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n = 80$.
A long terme, les nombres de ruraux et de citadins se stabiliseront autour de 40 millions et 80 millions respectivement.

6) a) Algorithme complété.

Entrée :	n, R et C sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0 R prend la valeur 90 C prend la valeur 30
Traitement :	Tant que $R \geqslant C$ faire n prend la valeur $n + 1$ R prend la valeur $50 \times 0,85^n + 40$ C prend la valeur $120 - R$ Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} R_n < C_n &\Leftrightarrow 40 + 50 \times (0,85)^n < 80 - 50 \times (0,85)^n \Leftrightarrow 100 \times (0,85)^n < 40 \\ &\Leftrightarrow (0,85)^n < 0,4 \\ &\Leftrightarrow \ln{(0,85)^n)} < \ln(0,4) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\ &\Leftrightarrow n\ln(0,85) < \ln(0,4) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,4)}{\ln(0,85)} \text{ (car } \ln(0,85) < 0) \\ &\Leftrightarrow n > 5,6\ldots \\ &\Leftrightarrow n \geqslant 6. \end{aligned}$$

L'algorithme affiche la valeur 6 ou encore en 2016, le nombre de personnes habitant en zone rurale devient strictement inférieur au nombre de personnes habitant en zone urbaine pour la première fois.

