Amérique du sud 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (4 points) (commun à tous les candidats)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. L'absence de réponse n'est pas pénalisée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. Les points A, B, C sont définis par leurs coordonnées :

$$A(3, -1, 4), \quad B(-1, 2, -3), \quad C(4, -1, 2).$$

Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation cartésienne : $2x - 3y + 2z - 7 = 0$.

La droite Δ a pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = -1 + 4t \\ y = 4 - t \\ z = -8 + 2t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

Affirmation 1 : Les droites Δ et (AC) sont orthogonales.

Affirmation 2 : Les points A, B et C déterminent un plan et ce plan a pour équation cartésienne $2x + 5y + z - 5 = 0$.

Affirmation 3 : Tous les points dont les coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ sont données par

$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + s - 2s' \\ y = 1 - 2s + s' \\ z = 1 - 4s + 2s' \end{array}\right.$, $s \in \mathbb{R}$, $s' \in \mathbb{R}$, appartiennent au plan $\mathscr{P}$.

Affirmation 4 : Il existe un plan parallèle au plan $\mathscr{P}$ qui contient la droite Δ.

Amérique du Sud 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(1, 0, -2)$. D'autre part, la droite Δ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(4, -1, 2)$.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AC} = 4 \times 1 + (-1) \times 0 + 2 \times (-2) = 4 - 4 = 0.$$

Donc les droites Δ et (AC) sont orthogonales. L'affirmation 1 est vraie.

2) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-4, 3, -7)$. S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, alors $3 = 0 \times k$ (à partir de la deuxième coordonnée) ce qui est impossible. Donc, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ou encore les points A, B et C déterminent un plan.

- $2x_A + 5y_A + z_A - 5 = 2 \times 3 + 5 \times (-1) + 4 - 5 = 6 - 5 + 4 - 5 = 0.$
- $2x_B + 5y_B + z_B - 5 = 2 \times (-1) + 5 \times 2 + (-3) - 5 = -2 + 10 - 3 - 5 = 0.$
- $2x_C + 5y_C + z_C - 5 = 2 \times 4 + 5 \times (-1) + 2 - 5 = 8 - 5 + 2 - 5 = 0.$

Les trois points A, B et C appartiennent au plan d'équation $2x + 5y + z - 5 = 0$ et donc le plan (ABC) est le plan d'équation $2x + 5y + z - 5 = 0$. L'affirmation 2 est vraie.

3) Par exemple, si $s = s' = 0$, le point M_0 correspondant est $(1, 1, 1)$ et ce point n'appartient pas à $\mathscr{P}$ car $2x_M - 3y_M + 2z_M - 7 = 2 - 3 + 2 - 7 = -6 \neq 0$. L'affirmation 3 est fausse.

4) Le plan $\mathscr{P}$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}(2, -3, 2)$.

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = 4 \times 2 + (-1) \times (-3) + 2 \times 2 = 15 \neq 0.$$

Donc la droite Δ est sécante au plan $\mathscr{P}$ puis la droite Δ est sécante à tout plan parallèle à $\mathscr{P}$. On en déduit qu'aucun plan parallèle à $\mathscr{P}$ ne contient la droite Δ. L'affirmation 4 est fausse.

