Amérique du Sud 2015. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) $u(1) = u(4) = 0$.

2) La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_u$ en $+\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 1$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{b}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{c}{x^2} = 0$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = a$. On en déduit que

$$\boxed{a = 1.}$$

3) Pour tout réel $x > 0$, $u(x) = 1 + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x^2}$. L'égalité $u(1) = 0$ fournit $1 + b + c = 0$ et l'égalité $u(4) = 0$ fournit $1 + \dfrac{b}{4} + \dfrac{c}{16} = 0$. Ensuite,

$$\left\{\begin{array}{l} 1+b+c=0 \\ 1+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{16}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b+c=-1 \\ 4b+c=-16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3b=-15\ ((II)-(I)) \\ 4b+c=-16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=-5 \\ -20+c=-16 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=-5 \\ c=4 \end{array}\right. .$$

Mais alors, pour tout réel $x > 0$,

$$u(x) = 1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2} = \frac{x^2+5x+4}{x^2}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ de }]0,+\infty[,\ u(x) = \frac{x^2+5x+4}{x^2}.}$$

Partie B

1) Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = x - (5x\ln(x) + 4)\dfrac{1}{x}$.

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln(x) = 0$ et donc $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} 5x\ln(x) + 4 = 4 > 0$. D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

En multipliant, on obtient $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} (5x\ln(x) + 4)\dfrac{1}{x} = +\infty$. Comme $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x = 0$, en retranchant, on obtient

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = -\infty.}$$

2) Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = x\left(1 - 5\dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{4}{x^2}\right)$.

D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x^2} = 0$.

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - 5\dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{4}{x^2}\right) = 1 - 5\times0 + 0 = 1$. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. En multipliant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

3) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = 1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2} = \frac{x^2-5x+4}{x^2} = u(x).$$

Pour tout réel $x > 0$, on a $x^2 > 0$. Donc, pour tout réel $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 5x + 4$. La partie A montre que le trinôme $x^2 - 5x + 4$ admet pour racines les deux nombres réels $x_1 = 1$ et $x_2 = 4$. On sait que le trinôme $x^2 - 5x + 4$ est du signe du coefficient de x^2, à savoir 1, sur $]-\infty, 1[\cup]4,+\infty[$. En tenant compte de $f(1) = 1 - 5\ln(1) - 4 = -3$ et $f(4) = 4 - 5\ln(4) - \dfrac{4}{4} = 3 - 10\ln 2$, on en déduit le tableau de variations de f.

 © Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.

x	0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	‖ $-\infty$	↗	-3	↘	$3-10\ln 2$	↗	$+\infty$

Partie C

1) La fonction u est continue et négative sur $[1,4]$. Donc,

$$\mathscr{A} = \int_1^4 -u(x)\,dx = [-f(x)]_1^4 = -f(4)+f(1) = -3+10\ln(2)-3 = 10\ln 2-6.$$

$$\boxed{\mathscr{A} = 10\ln(2)-6 = 0,9 \text{ arrondi à } 10^{-1}.}$$

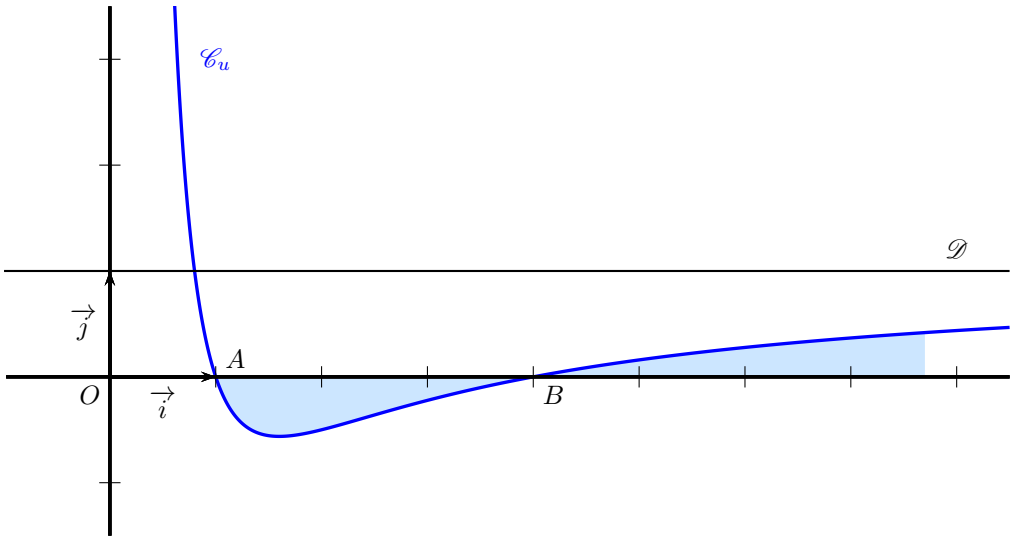
2) Soit λ un réel supérieur ou égal à 4. La fonction u est continue et positive sur $[4,\lambda]$. Donc

$$\mathscr{A}_\lambda = \int_4^\lambda u(x)\,dx = [f(x)]_4^\lambda = f(\lambda)-f(4).$$

Par suite,

$$\mathscr{A}_\lambda = \mathscr{A} \Leftrightarrow f(\lambda)-f(4) = f(1)-f(4) \Leftrightarrow f(\lambda) = -3.$$

D'après la partie B, la fonction f est continue et strictement croissante sur $[4,+\infty[$. De plus, $f(4) = -3,9\ldots < -3$ et $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} f(\lambda) = +\infty > -3$. On sait alors que l'équation $f(\lambda) = -3$ admet une solution et une seulme dans $[4,+\infty[$ ou encore il existe un réel λ de $[4,+\infty[$ et un seul tel que $\mathscr{A}_\lambda = \mathscr{A}$.



 © Jean-Louis Rouget, 2015. Tous droits réservés.