Ecole Pour l'Informatique et les Techniques Avancées.
Mathématiques. Option

Partie I. Préliminaires sur les séries de RIEMANN

1) *Etude de la série de* RIEMANN *pour* $x = 1$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $[n, n+1] \subset]0, +\infty[$ puis la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue et décroissante sur $[n, n+1]$. Pour tout réel t de $[n, n+1]$, $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{n}$. Par croissance de l'intégration, on obtient

$$\frac{1}{n+1} = \int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}\,dt \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{n}\,dt = \frac{1}{n}.$$

b) Puisque $\displaystyle\int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0 = H_1 - \frac{1}{1}$, l'encadrement est vrai quand $p = 1$.

Soit $p \geqslant 2$.

$$\int_1^p \frac{1}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{p-1} \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,dt \leqslant \sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{n} = H_p - \frac{1}{p}.$$

Puisque $\displaystyle\int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0 = H_1 - \frac{1}{1}$, cette inégalité reste vraie quand $p = 1$. De même,

$$\int_1^p \frac{1}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{p-1} \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,dt \geqslant \sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{n+1} \sum_{n=2}^{p} \frac{1}{n} = H_p - 1.$$

c) On en déduit que pour $p \geqslant 1$, $H_p \leqslant 1 + \displaystyle\int_1^p \frac{1}{t}\,dt = 1 + \ln(p)$ et $H_p \geqslant \dfrac{1}{p} + \displaystyle\int_1^p \frac{1}{t}\,dt = \dfrac{1}{p} + \ln(p) \geqslant \ln(p)$. Donc,

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \ln(p) \leqslant H_p \leqslant \ln(p) + 1.$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $H_p - \ln(p) \geqslant 0$. D'autre part,

$$(H_{p+1} - \ln(p+1)) - (H_p - \ln(p)) = \frac{1}{p+1} - (\ln(p+1) - \ln(p)) = \frac{1}{p+1} - \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,dt \leqslant 0.$$

Donc, la suite $(H_p - \ln(p))_{p \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0. On en déduit que la suite $(H_p - \ln(p))_{p \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. On pose $\gamma = \lim\limits_{p \to +\infty} (H_p - \ln(p))$ de sorte que $H_p \underset{p \to +\infty}{=} \ln(p) + \gamma + o(1)$.

2) *Etude de la série de* RIEMANN *pour* $x > 1$

a) Soit $x > 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ est décroissante sur $[n, n+1]$ et donc, pour tout $t \in [n, n+1]$, $\dfrac{1}{(n+1)^x} \leqslant \dfrac{1}{t^x} \leqslant \dfrac{1}{n^x}$ puis en intégrant

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x}.$$

b) Soit $x > 1$. Puisque la série de terme général $\dfrac{1}{n^x}$ est à termes réels positifs, cette série converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

Soit $p \geqslant 2$. $\displaystyle\sum_{n=2}^{p} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \sum_{n=1}^{p-1} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} = \int_1^p \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{x-1}\left(1 - \frac{1}{p^{x-1}}\right) \leqslant \frac{1}{x-1}$.

Ainsi pour tout $p \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^x} \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}$ ce qui reste vrai quand $p = 1$. D'après la remarque initiale, la série de terme général $\dfrac{1}{n^x}$ converge.

c) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^x} - 1 \leqslant \frac{1}{x-1}$. Quand p tend vers $+\infty$, on obtient $\zeta(x) - 1 \leqslant \dfrac{1}{x-1}$. D'autre part, $\zeta(x) - 1 = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \geqslant 0$. Finalement,

$$\forall x > 1,\ 0 \leqslant \zeta(x) - 1 \leqslant \frac{1}{x-1}.$$

Pour $x \geqslant 2$, $\dfrac{1}{x-1} \leqslant \dfrac{1}{2-1} = 1$ puis $0 \leqslant \zeta(x) - 1 \leqslant 1$ et finalement, $1 \leqslant \zeta(x) \leqslant 2$.

Partie II. Etude de la fonction F

3) *Convergence de la série définissant* F

a) Soit $x > -1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + \dfrac{x}{n} > 1 - \dfrac{1}{n} \geqslant 0$ et donc $1 + \dfrac{x}{n} > 0$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x)$ existe. Ensuite,

$$u_n(x) = \frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{x}{n} - \left(\frac{x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Puisque la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge (série de RIEMANN d'exposant $2 > 1$), la série de terme général $u_n(x)$ converge absolument et donc converge.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction u_n est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et pour $x > -1$,

$$u_n'(x) = \frac{1}{n} - \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{x}{n}} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)}.$$

On en déduit que u_n' est strictement négative sur $]-1, 0[$ et strictement positive sur $]0, +\infty[$ et donc que la fonction u_n est strictement décroissante sur $]-1, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. On note que u_n admet en 0 un minimum égal à 0 et donc la fonction u_n est positive sur $]-1, +\infty[$

c) Soit $a \in]-1, 0]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque la fonction u_n est décroissante sur $]-1, 0]$, pour tout réel $x \in [a, 0]$, $|u_n(x)| = u_n(x) \leqslant u_n(a)$ et donc $\|u_n\|_{\infty,[a,0]} \leqslant u_n(a)$. Puisque la série numérique de terme général $u_n(a)$ converge, il en est de même de la série de terme général $\|u_n\|_{\infty,[a,0]}$.
On en déduit que la série de fonctions de terme général u_n converge normalement vers F sur $[a, 0]$.

De même, pour $b \in [0, +\infty[$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, puisque la fonction u_n est croissante sur $[0, b]$, $\|u_n\|_{\infty,[0,b]} \leqslant u_n(b)$.
On en déduit que la série de fonctions de terme général u_n converge normalement vers F sur $[0, b]$.

Soient enfin a et b deux réels tels que $-1 < a \leqslant 0 \leqslant b$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|u_n\|_{\infty,[a,b]} \leqslant u_n(a) + u_n(b)$ et donc la série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur $[a, b]$.

d) Soit $[a, b]$ un segment contenu dans $]-1, +\infty[$. Chaque fonction u_n est continue sur $[a, b]$ et la série de fonctions de terme général u_n converge uniformément (car normalement) vers F sur $[a, b]$. On en déduit que F est continue sur $[a, b]$.

F est continue sur tout segment contenu dans $]-1, +\infty[$ et donc F est continue sur $]-1, +\infty[$.

4) *Equation fonctionnelle vérifiée par* F

a) Soit $x \in]-1, +\infty[$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{p} u_n(x+1) - \sum_{n=1}^{p} u_n(x) &= \sum_{n=1}^{p} \left(\frac{x+1}{n} - \ln\left(1 + \frac{x+1}{n}\right)\right) - \sum_{n=1}^{p} \left(\frac{x}{n} - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{p} \left((\ln(x+n+1) - \ln(n)) - (\ln(x+n) - \ln(n))\right) \\
&= H_p - \sum_{n=1}^{p} (\ln(x+n+1) - \ln(x+n)) \\
&= \ln(x+1) + H_p - \ln(x+p+1) \text{ (somme télescopique)}.
\end{aligned}$$

b) On en déduit que

$$\begin{aligned}F(x+1)-F(x) &\underset{p\to+\infty}{=} \sum_{n=1}^{p} u_n(x+1) - \sum_{n=1}^{p} u_n(x) + o(1) \underset{p\to+\infty}{=} \ln(x+1) + H_p - \ln(x+p+1) + o(1)\\ &\underset{p\to+\infty}{=} \ln(x+1) + H_p - \ln(p) - \ln\left(1+\frac{x+1}{p}\right) + o(1)\\ &\underset{p\to+\infty}{=} \ln(x+1) + \gamma + o(1) + o(1) + o(1) \underset{p\to+\infty}{=} \ln(x+1) + \gamma + o(1).\end{aligned}$$

Ainsi, quand p tend vers $+\infty$, on obtient pour tout $x > -1$, $F(x+1) - F(x) = \ln(x+1) + \gamma$.

c) Pour $x > -1$, $F(x) = -\ln(x+1) + F(x+1) - \gamma$. La fonction F est continue en 0 et en particulier F est bornée sur un voisinage de 0. Ainsi, $F(x) \underset{x\to-1}{=} -\ln(x+1) + O(1)$ et en particulier, $F(x) \underset{x\to-1}{=} -\ln(x+1) + o(\ln(x+1))$. Finalement,

$$F(x) \underset{x\to-1}{\sim} -\ln(x+1).$$

d) Montrons par récurrence que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $F(m) = \ln(m!) + m\gamma$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(0) = 0$ et donc $F(0) = 0 = \ln(0!) + 0\gamma$. L'égalité à démontrer est vraie quand $m = 0$.
- Soit $m \geqslant 0$. Supposons que $F(m) = \ln(m!) + m\gamma$. Alors,

$$F(m+1) = F(m) + \ln(m+1) + \gamma = \ln(m!) + m\gamma + \ln(m+1) + \gamma = \ln((m+1)!) + (m+1)\gamma.$$

Le résultat est démontré par récurrence.

5) *Convergence de la série dérivée de* F

a) Soit $x > -1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n'(x) = \dfrac{x}{n(n+x)}$ et donc $u_n'(x) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. On en déduit que la série numérique de terme général $u_n'(x)$ converge absolument et donc converge.
Ceci montre que la série de fonctions de terme général u_n' converge simplement sur $]-1,+\infty[$.

b) Soient a et b deux réels tels que $-1 < a \leqslant 0 \leqslant b$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [a,b]$,

$$|u_n'(x)| = \frac{|x|}{n(n+x)} \leqslant \frac{|b|}{n(n+a)}$$

et donc $\|u_n'\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \dfrac{|b|}{n(n+a)}$. Puisque $\dfrac{|b|}{n(n+a)} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, la série de terme général $\|u_n'\|_{\infty,[a,b]}$ converge. Ceci montre que la série de fonctions de terme général u_n' converge normalement sur $[a,b]$.

c) Soient a et b deux réels tels que $-1 < a \leqslant 0 \leqslant b$.

- La série de fonctions de terme général u_n converge simplement vers F sur $[a,b]$,
- chaque fonction u_n est de classe C^1 sur $[a,b]$,
- la série de fonctions de terme général u_n' converge uniformément (car normalement) sur $[a,b]$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, F est de classe C^1 sur $[a,b]$ et F' s'obtient par dérivation terme à terme.

Ceci étant vrai pour tous a et b tels que $-1 < a \leqslant 0 \leqslant b$, on a montré que F est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$ et que

$$\forall x > -1,\ F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)}.$$

d) En particulier $F'(0) = 0$ et $F'(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{p}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right) = \lim_{p\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{p+1}\right) = 1$.

6) *Etude de* F *au voisinage de* $+\infty$

a) D'après la question 3)b), chaque fonction u_n est positive sur $]-1,+\infty[$ et donc pour $x > -1$,

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \geqslant u_1(x) = x - \ln(1+x).$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\ln(1+x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x - \ln(1+x)) = +\infty$. Mais alors, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

b) Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{x}{t(t+x)}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et est dominée par $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$. Donc, la fonction $t \mapsto \dfrac{x}{t(t+x)}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{t(t+x)}\,dt$ est convergente.

Soit $X \geqslant 1$. $\displaystyle\int_1^X \frac{x}{t(t+x)}\,dt = \int_1^X \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) dt = [\ln(t) - \ln(t+x)]_1^X = \ln(x+1) - \ln\left(1 + \frac{x}{X}\right)$. Quand X tend vers $+\infty$, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{t(t+x)}\,dt = \ln(x+1).$$

c) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$. Par décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{x}{t(t+x)}$ sur $[n, n+1]$, on obtient

$$\frac{x}{(n+1)(n+1+x)} = \int_n^{n+1} \frac{x}{(n+1)(n+1+x)}\,dt \leqslant \int_n^{n+1} \frac{x}{t(t+x)}\,dt \leqslant \int_n^{n+1} \frac{x}{n(n+x)}\,dt = \frac{x}{n(n+x)}.$$

En additionnant membre à membre ces encadrements, on obtient

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(n+1)(n+1+x)} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{x}{t(t+x)}\,dt \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)}$$

ou encore

$$F'(x) - \frac{x}{x+1} \leqslant \ln(x+1) \leqslant F'(x).$$

On a montré que

$$\forall x > 0,\ \ln(x+1) \leqslant F'(x) \leqslant \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}.$$

Pour $x > 0$, $\ln(x+1) > 0$ et donc $1 \leqslant \dfrac{F'(x)}{\ln(x+1)} \leqslant 1 + \dfrac{x}{(x+1)\ln(x+1)}$. Le théorème des gendarmes montre que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{F'(x)}{\ln(x+1)} = 1$ ou encore $F'(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln(x+1) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln(x)$. On a montré que

$$F'(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln(x).$$

d) Puisque F est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$F(x) = F(1) + \int_1^x F'(t)\,dt.$$

Ainsi,
- $F'(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \ln(t) > 0$,
- l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln(t)\,dt$ est une intégrale divergente.

D'après un théorème de sommation des relations de comparaison,

$$\int_1^x F'(t)\,dt \underset{x \to +\infty}{\sim} \int_1^x \ln(t)\,dt = x\ln(x) - x + 1 \underset{x \to +\infty}{\sim} x\ln(x),$$

puis $F(x) = F(1) + \displaystyle\int_1^x F'(t)\,dt \underset{x \to +\infty}{\sim} x\ln(x)$ (car $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x\ln(x) = +\infty$). On a montré que

$$F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x\ln(x).$$

7) *La fonction* F *est de classe* C^∞ *sur* I

a) Soit $a > -1$. Montrons par récurrence que pour tout $k \geqslant 2$, F est de classe C^k sur $[a, +\infty[$ et que $\forall x \in [a, +\infty[$,

$$F^{(k)}(x) = (-1)^k (k-1)! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^k}.$$

• On sait déjà que la fonction F est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et que pour tout $x \geqslant a$, $F'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(x+n)}$.

De plus,

- la série de fonction de terme général u'_n converge simplement vers F' sur $[a, +\infty[$,

- chaque fonction u'_n est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \geqslant a$, $(u'_n)'(x) = u''_n(x) = \dfrac{1}{n}\dfrac{n}{(x+n)^2} = \dfrac{1}{(x+n)^2}$.

- $\|(u'_n)'\|_{\infty,[a,+\infty[} = \dfrac{1}{(n+a)^2}$ est le terme général d'une série convergente de sorte que la série de fonctions de terme général $(u'_n)'$ converge normalement et en particulier uniformément sur $[a, +\infty[$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, F' est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ ou encore F est de classe C^2 sur $[a, +\infty[$ et pour tout $x \geqslant a$, $F''(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} = (-1)^2(2-1)! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$. Le résultat est donc vrai quand $k = 2$.

• Soit $k \geqslant 2$. Supposons que F est de classe C^k sur $[a, +\infty[$ et pour tout $x \geqslant a$, $F^{(k)}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^{(k)}(x) = (-1)^k(k-1)! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^k}$.

- la série de fonction de terme général $u_n^{(k)}$ converge simplement vers $F(k)$ sur $[a, +\infty[$,

- chaque fonction $u_n(k)$ est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \geqslant a$, $\left(u_n^{(k)}\right)'(x) = u_n^{(k+1)}(x) = (-1)^k(k-1)!\dfrac{-k}{(x+n)^{k+1}} = (-1)^{k+1}k!\dfrac{1}{(x+n)^{k+1}}$.

- $\left\|(u_n^{(k)})'\right\|_{\infty,[a,+\infty[} = \dfrac{k!}{(n+a)^{k+1}}$ est le terme général d'une série convergente de sorte que la série de fonctions de terme
général $(u_n^{(k)})'$ converge normalement et en particulier uniformément sur $[a, +\infty[$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, $F(k)$ est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ ou encore F est de classe C^{k+1} sur $[a, +\infty[$ et pour tout $x \geqslant a$, $F(k+1)(x) = (-1)^{k+1}k! \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^{k+1}}$.

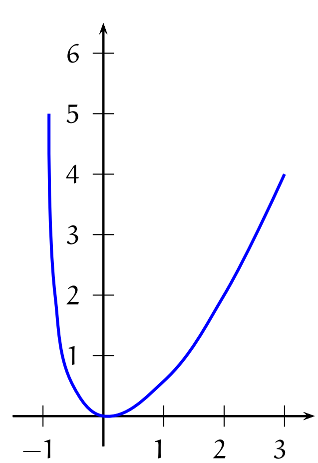
Le résultat est démontré par récurrence. Ceci étant vrai pour tout $a > -1$, on a montré que pour tout $k \geqslant 2$, la fonction F est de classe C^k sur $]-1, +\infty[$ et

$$\forall x > -1,\ F(k)(x) = (-1)^k(k-1)! \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^k}.$$

b) $F(0) = 0$, $F'(0) = 0$ puis pour $k \geqslant 2$, $F^{(k)}(0) = (-1)^k(k-1)!\zeta(k)$.

c) La fonction F' est négative sur $]-1, 0]$ et positive sur $[0, +\infty[$. Donc, la fonction F est décroissante sur $]-1, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.
La fonction F'' est positive sur $]-1, +\infty[$. Donc, la fonction F est convexe sur $]-1, +\infty[$.
$F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x\ln(x)$. Donc, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ et de plus la courbe représentative de F admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy).
Pour tout $x > -1$, $F(x) \geqslant x - \ln(1+x)$ et en particulier, $\displaystyle\lim_{x\to-1} F(x) = +\infty$. Enfin, $F(1) = \gamma = 0,577\ldots$

Allure du graphe de F.



8) *Convergence de la série de* Taylor *de* F *vers* F

a) Sans préjuger de l'existence, pour tout $x > -1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{F^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k(k-1)!\zeta(k)\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k\zeta(k)\frac{x^k}{k}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question la question c), pour $k \geqslant 2$, $1 \leqslant \zeta(k) \leqslant 2$ et donc

$$\frac{1}{k}|x|^k \leqslant \left|(-1)^k\zeta(k)\frac{x^k}{k}\right| = \left|\frac{F^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| \leqslant \frac{2}{k}|x|^k.$$

Si $|x| > 1$, la série de terme général $\dfrac{1}{k}|x|^k$ diverge grossièrement et il en est de même de la série de terme général $(-1)^k\zeta(k)\dfrac{x^k}{k}$. Ceci montre que $R \leqslant 1$.

Si $|x| < 1$, la série de terme général $\dfrac{2}{k}|x|^k$ converge et il en est de même de la série de terme général $(-1)^k\zeta(k)\dfrac{x^k}{k}$. Ceci montre que $R \geqslant 1$. Finalement, $R = 1$.

b) On sait que

$$\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

et donc que

$$\forall x \in]-1,1[,\ x - \ln(1+x) = \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}.$$

Le rayon de convergence des deux séries est 1.

c) Soit $x \in]-1,1[$.

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^k}{kn^k}\right).$$

Pour $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 2$, posons $v_{n,k}(x) = (-1)^k\dfrac{x^k}{kn^k}$.

- Pour chaque $k \geqslant 2$, la série de terme général $|v_{n,k}(x)| = \dfrac{|x|^k}{kn^k}$, $n \geqslant 2$, converge et a pour somme $\zeta(k)\dfrac{|x|^k}{k}$,
- La série de terme général $\zeta(k)\dfrac{|x|^k}{k}$, $k \geqslant 2$, converge car $|x| < 1$ et $R = 1$.

Donc, la famille $(v_{n,k}(x))_{n\geqslant 1,\ k\geqslant 2}$ est sommable. D'après le théorème de sommation par paquets,

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^k}{kn^k}\right) = \sum_{k=2}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^k}{kn^k}\right) = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}\zeta(k)x^k.$$

